

**Berechnung dreidimensionaler, reibungsbehafteter,
inkompressibler Innenströmungen am Beispiel
des Leitrades eines hydrodynamischen Wandlers**

DISSERTATION

zur
Erlangung des Grades
Doktor-Ingenieur
der
Fakultät für Maschinenbau
der Ruhr-Universität Bochum

von
KLAUS-UWE ZIEGS
Herten

Bochum 1987



Digitized by the Internet Archive
in 2026

**Berechnung dreidimensionaler, reibungsbehafteter,
inkompressibler Innenströmungen am Beispiel
des Leitrades eines hydrodynamischen Wandlers**

DISSERTATION

zur

Erlangung des Grades

Doktor-Ingenieur

der

Fakultät für Maschinenbau

der Ruhr-Universität Bochum

von

KLAUS-UWE ZIEGS

Herten

Bochum 1987

Doktorarbeit eingereicht am: 21.10.1987
Tag der mündlichen Prüfung: 11.12.1987

Referent: Prof. Dr.-Ing. K.G. Grahl
Korreferent: Priv. Doz. Dr. N.K. Mitra

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Fluidenergiemaschinen im Institut für Energietechnik der Ruhr-Universität Bochum.

Mein Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Fister, der diese Arbeit angeregt und auch nach seiner Emeritierung fachlich betreut hatte, aber verstarb, bevor diese Arbeit zu einem Ende geführt werden konnte.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. K.-G. Grahl, dem neuen Lehrstuhlinhaber, für die wohlwollende Unterstützung der Arbeit. Er hat die Betreuung übernommen und wesentlich dazu beigetragen, daß die Arbeit erfolgreich abgeschlossen werden konnte.

Herrn Priv. Doz. Dr. N.K. Mitra danke ich für die freundliche Übernahme des Korreferates, für seinen fachlichen Rat und für die kritische Durchsicht der Arbeit.

Meinem Freund und Kollegen, Herrn Dipl.-Ing. M. Thiele, möchte ich besonders für die zahlreichen anregenden Diskussionen und für die Unterstützung bei der Erstellung der umfangreichen Software danken.

Allen Mitarbeitern des Lehrstuhls für Fluidenergiemaschinen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, gilt mein herzlicher Dank. Hervorheben möchte ich hierbei meinen Kollegen, Herrn Dr. W. Volgmann, dem ich für zahlreiche, mathematisch geprägte Diskussionen danke.

Herten, im Dezember 1987

Klaus-Uwe Ziegs

Berechnung dreidimensionaler, reibungsbehafteter,
inkompressibler Innenströmungen am Beispiel
des Leitrades eines hydrodynamischen Wandlers

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Verwendete Formelzeichen und Bezeichnungen	
<u>1. Einleitung</u>	1
<u>2. Ausgangsbasis und Vorgehensweise</u>	5
2.1 Die Strömungsverhältnisse im hydrodynamischen Wandler	5
2.2 Die problembeschreibenden Gleichungen	9
2.3 Die numerische Lösung der Erhaltungsgleichungen	13
2.4 Auswahl des Diskretisierungsverfahrens	15
<u>3. Theoretische Ableitung des Rechenverfahrens zur Lösung der</u> <u> dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichung</u>	19
3.1 Die Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls	20
3.2 Die Diskretisierung der Bewegungsgleichungen	22
3.2.1 Grundlegende Vorgehensweise und Vereinbarungen	22
3.2.2 Die Approximation der zeitlichen Ableitungen	36
3.2.3 Die räumliche Diskretisierung der einzelnen Phasen	40
3.2.3.1 Die Phase 1	42
3.2.3.2 Die Phase 2	51
3.2.3.3 Die Phase 3	58
3.3 Die Behandlung der Randbedingungen	66
3.4 Das Turbulenzmodell	70

<u>4. Die Behandlung der Geometrie</u>	77
4.1 Methoden zur numerischen Netzgenerierung	81
4.2 Die automatische Netzgenerierung mit Hilfe elliptischer Differentialgleichungen	82
<u>5. Vergleich mit bekannten Lösungen der Navier-Stokes- Gleichung</u>	88
5.1 Die vollausgebildete laminare Spaltströmung	89
5.2 Die Hamel'sche Strömung in konvergierenden und divergierenden Kanälen	92
5.2.1 Die Strömung in konvergierenden Kanälen	96
5.2.2 Die Strömung in divergierenden Kanälen	102
5.3 Die vollausgebildete turbulente Spaltströmung	104
5.4 Die vollausgebildete turbulente Kanalströmung	108
<u>6. Anwendung des Rechenverfahrens auf praktisch relevante Beispiele</u>	109
6.1 Nachrechnung einer laminaren Strömung in einer 90°-Umlenkung mit gleichbleibendem quadratischem Querschnitt	109
6.2 Nachrechnung der experimentellen Untersuchungen der Leitradströmung eines hydrodynamischen Wandlers	127
6.2.1 Darstellung von Rechen- und Meßergebnissen	129
6.2.2 Vergleich von Rechen- und Meßergebnissen	136
6.2.2.1 Die Leitradströmung im reduzierten Wandlerkreislauf (Fall 1)	136
6.2.2.2 Die Leitradströmung im vollständigen Wandlerkreislauf	147
<u>7. Zusammenfassung</u>	176

<u>Anhang A1: Vollständige Darstellung der Differenzen-</u> <u>gleichungen</u>	180
<u>Anhang A2: Stabilitätsanalyse des Diskretisierungsverfahrens</u> <u>am Beispiel der eindimensionalen Burgers-</u> <u>Gleichung</u>	204
<u>Anhang A3: Anmerkungen zur Zeitschrittwahl im dreidimen-</u> <u>sionalen Fall</u>	220
<u>Anhang A4: Die Implementierung des Rechenverfahrens</u>	222
<u>Literaturverzeichnis</u>	226

Verwendete Formelzeichen und Bezeichnungen

Lateinische Buchstaben

A	Fläche (Oberfläche)
A_{mn}	Inhalt der Projektionsfläche der Oberfläche "m" in Richtung der Koordinate "n"
dA	Oberflächenelement
δA	Oberflächenelement
b	Kanalbreite
c	flächenzentrierte Geschwindigkeit
D	lokales Residuum
De	Dean-Zahl
def $\vec{u}$	Deformationstensor
d_h	hydraulischer Durchmesser (4 x Querschnittsfläche/benetztem Umfang)
$\vec{g}$	Erdbeschleunigung
$\underline{\underline{I}}$	Einheitstensor
$\vec{i}$	Basisvektor des kartesischen Koordinatensystems
i	Index des logischen Raumes
J	Jacobi-Determinante
$\vec{j}$	Basisvektor des kartesischen Koordinatensystems
j	Index des logischen Raumes
$\vec{k}$	Basisvektor des kartesischen Koordinatensystems
k	Index des logischen Raumes
L	Leitrad
l	Mischungsweg
M	Masse
M	Drehmoment
MV	einem Knoten zugeordnete Masse
NX	Anzahl der Zellen in i-Richtung
NY	Anzahl der Zellen in j-Richtung
NZ	Anzahl der Zellen in k-Richtung
$\vec{n}$	Normalenvektor
n_x	Komponente des Normalenvektors in x-Richtung

n_y	Komponente des Normalenvektors in y-Richtung
n_z	Komponente des Normalenvektors in z-Richtung
P	Pumpe
p	Druck
δp	Druckänderung
Re	Reynolds-Zahl
$\vec{r}$	Ortsvektor
s	Koordinate
T	Turbine
δt	Zeitschritt
t	Zeit
$\vec{U}$	Geschwindigkeit des Kontrollvolumens
$\vec{u}$	Geschwindigkeit
u	Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung
V	Volumen
$\dot{V}$	Volumenstrom
dV	Volumenelement
v	Geschwindigkeitskomponente in y-Richtung
w	Geschwindigkeitskomponente in z-Richtung
x	Koordinate
y	Koordinate
z	Koordinate

Griechische Buchstaben

α	Koeffizient
β	Koeffizient
$\vec{\nabla}$	Nabla-Operator
$\vec{\delta}$	Einheitsvektor
δ	Wandabstand
ϵ	relativer Fehler
ζ	Widerstandszahl
ζ	krummlinige Koordinate
η	krummlinige Koordinate
η	Wirkungsgrad



θ	Winkel
λ	Reibungszahl
μ	dynamische Zähigkeit
ν	kinematische Zähigkeit
ν	Drehzahlverhältnis
ξ	krummlinige Koordinate
$\underline{\underline{\Pi}}$	Spannungstensor
ρ	Dichte
$\underline{\underline{\sigma}}$	viskoser Anteil des Spannungstensors
τ	Schubspannung
φ	Winkel
ω	Winkelgeschwindigkeit

Indizes und Kennzeichen

$\vec{a}^t$	Transponierter Vektor $\vec{a}$
$-$	mittlere Größe
$'$	Schwankungswerte
$'$	das Kontrollvolumen für die Impulsbilanz betreffend
$*$	iterativ verbesserte Größe
$**$	Größe nach Phase 1
$***$	Größe nach Phase 2
A	Austritt
au	außen
b	bottom
bez	Bezug-
c	kontinuitätsgemittelt
D	Durchgangspunkt
d	derrier
E	Eintritt
f	front
G	gesamt
in	innen
ijk	den Knoten (die Zelle) i,j,k betreffend
Ka	Kanal

Kr	Krümmen
L	Leitrad
l	left
m	Meridian
max	Maximum
n	Zeitebene n
n+1	Zeitebene n+1; Größe nach Phase 3
ob	oben
P	Pumpe
r	radial
r	right
T	Turbine
t	top
t	total
W, w	Wand
x, y, z	Komponenten in kartesischen Koordinaten
u	Zählindex
ψ	die Umfangsrichtung betreffend

1. Einleitung

Bei vielen heute technisch realisierten Energieumwandlungsprozessen, bei denen Energie in Form von mechanischer Arbeit ausgetauscht wird, sind Fluidenergiemaschinen beteiligt. Die Untergliederung der mechanisch wirkenden Fluidenergiemaschinen erfolgt nach:

- dynamisch arbeitenden Maschinen, bei denen der Energieaustausch maßgebend durch die Fluidgeschwindigkeit beeinflusst wird (z. B. sämtliche Pumpen, Turbinen und Verdichter),
- statisch arbeitenden Maschinen, bei denen der Energieaustausch zwischen den bewegten Maschinenteilen und dem Fluid in einem geschlossenen System vorwiegend in Volumenänderungsarbeit besteht [1] .

Wegen der ständig steigenden Anforderungen an die häufig als Turbomaschinen bezeichneten dynamisch wirkenden Fluidenergiemaschinen sind detaillierte Kenntnisse der aerodynamischen Strömungsverhältnisse in den einzelnen Komponenten schon in der Auslegungsphase erforderlich, um eine möglichst optimale Energieumwandlung zu erreichen. Da Turbomaschinen für den Auslegungspunkt im allgemeinen gute Wirkungsgrade aufweisen, tendiert man heute dazu, die Breite ihres Arbeitsbereiches auszudehnen.

Die Erfahrung lehrt, daß das Betriebsverhalten unter anderem sehr empfindlich gegenüber Änderungen in der geometrischen Gestaltung der Baukomponenten, wie z. B. dem Laufrad, dem Leitrad oder auch den Rückführkanälen ist. In neuerer Zeit ergänzen und ersetzen numerische Untersuchungen vermehrt die traditionell-experimentellen Verfahren, die zwar bis auf meßtechnisch bedingte Ungenauigkeiten die reale Strömung widerspiegeln, stets aber den kostenintensiven Bau von Prototypen und Prüfständen erfordern. Die Rechenverfahren ermöglichen schon in der Auslegungsphase Einblicke in die zeitliche Entwicklung von Strömungsvorgängen und deren Auswirkungen im gesam-

ten Strömungsfeld, und sie gestatten die detaillierte Untersuchung von Phänomenen, wie z. B. Sekundärströmungen, Wirbelentstehung an Schaufelvorder- und -hinterkanten sowie Spaltwirbel infolge Spaltströmungen an halboffenen Radialverdichterlaufrädern, die auf meßtechnischem Wege schwer oder gar nicht aufzuzeigen sind.

Da in letzter Zeit die Strömungsverhältnisse in einem hydrodynamischen Wandler experimentell ausführlich untersucht worden sind [12], wird zur Überprüfung der Güte des zu entwickelnden Rechenverfahrens, die Strömung z. B. im Leitrad des Versuchswandlers für verschiedene Betriebspunkte berechnet.

Vorstellung des hydrodynamischen Wandlers

Nach Fister [1] ist der hydrodynamische Wandler (Bild 1.1) keine eigentliche Fluidenergiemaschine mehr, sondern eine Fluidenergiemaschinenanlage, die aus einer Kombination von Flüssigkeitsturbine, Pumpe und einem gehäusefesten Schaufelgitter, dem sogenannten Leitrad, besteht.

Die von einem Motor mit dem Drehmoment M_p und der Winkelgeschwindigkeit ω_p angetriebene Pumpe P beschleunigt das sich in dem Pumpenlaufrad befindende Fluid, das mechanische Energie aufnimmt. Diese Energie wird von dem Kreislauffluid in der Flüssigkeitsturbine an das Turbinenrad T abgegeben. Auf diese Weise wird ein Drehmoment M_T auf die Abtriebswelle übertragen. Da die Summe aller Momente Null ist, differiert das Abtriebsmoment M_T nur dann von dem Antriebsmoment M_p , wenn ein gehäusefestes Schaufelgitter L vorhanden ist. Je nach Größe des von diesem Bauelement aufgenommenen Momentes, dem sogenannten Leitradmoment, kann das Abtriebsmoment größer, kleiner oder gleich dem Antriebsmoment sein. Da zwischen An- und Abtrieb keine mechanische Verbindung vorhanden ist, stellt sich die Winkelgeschwindigkeit auf der Abtriebsseite ω_T entsprechend der vorhandenen Belastung selbsttätig stufenlos ein.

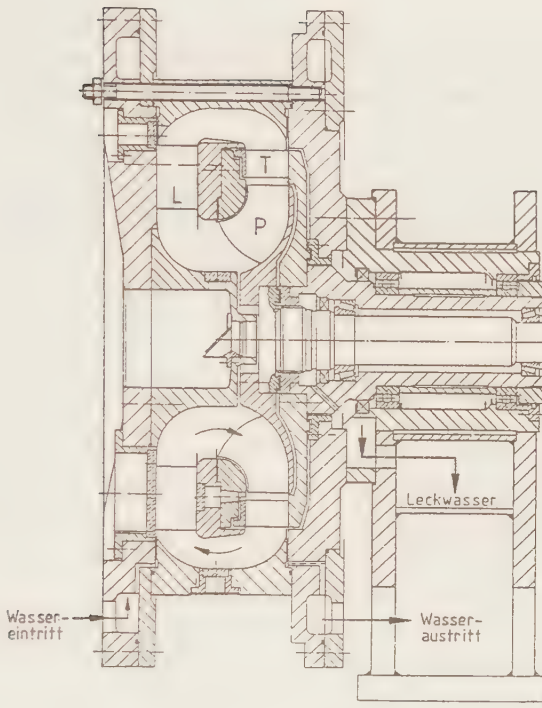


Bild 1.1: Der hydrodynamische Wandler

Die drei wesentlichen Bauelemente eines hydrodynamischen Wandlers, das Pumpen-, das Turbinenlaufrad sowie das Leitrad, können auf verschiedene Arten miteinander kombiniert werden, wobei sich unterschiedliche Kennlinienverläufe ergeben [21]. Das Betriebsverhalten kann so dem Anwendungsfall angepaßt werden, wodurch vielfältige Einsatzmöglichkeiten, z. B. als Antrieb für Busse und Lokomotiven oder selbstfahrende Arbeitsmaschinen entstehen [11, 16].

Als Vorteile für den Einsatz eines hydrodynamischen Wandlers sind besonders folgende Gesichtspunkte zu nennen:

Neben einem unbelasteten Anfahren ohne Stöße werden im mechanischen Teil der Anlage Überbeanspruchungen vermieden. Außerdem

besitzt der hydrodynamische Wandler eine ausgezeichnete Schwingungsdämpfung und erlaubt aufgrund der Erhöhung des abtriebsseitigen Momentes eine entsprechend günstigere Dimensionierung der Antriebsmaschine.

Nachteilig kann sich allerdings die Einflußnahme des Wandlers auf An- und Abtriebsseite auswirken, die in dieser Form bei einem mechanischen Getriebe nicht zu finden ist.

2. Ausgangsbasis und Vorgehensweise

In diesem Abschnitt wird zunächst aus den Strömungsverhältnissen im hydrodynamischen Wandler ein Forderungskatalog für das zu entwickelnde Rechenverfahren erstellt. Daran anschließend werden die problembeschreibenden Gleichungen sowie Möglichkeiten zu ihrer Lösung vorgestellt. Einige Gesichtspunkte zur Auswahl des Diskretisierungsverfahrens schließen diesen Abschnitt ab.

2.1 Die Strömungsverhältnisse im hydrodynamischen Wandler

Neben den arbeitsübertragenden Bauelementen eines hydrodynamischen Wandlers, dem Pumpen- und dem Turbinenlaufrad, unterscheidet man noch strömungsrelevante Bauelemente [22]. Unter diese Kategorie fallen neben dem Leitrad auch andere raumfeste Kanäle, in denen annähernd adiabate Strömungs- jedoch keine Arbeitsvorgänge stattfinden. Im hydrodynamischen Wandler handelt es sich dabei um schaufellose Ringräume sowie um 90°- bzw. 180°-Umlenkungen.

Durch die kompakte Anordnung von arbeitsübertragenden und strömungsrelevanten Bauelementen auf engstem Raum ergeben sich aufgrund der erforderlichen komplexen Geometrien komplizierte Strömungsverhältnisse, die neben vielen anderen Parametern auch vom sogenannten Drehzahlverhältnis $v = \omega_T / \omega_P$ abhängen.

Da schon die ersten Wandler Wirkungsgrade von 80 % und mehr im Auslegungspunkt aufwiesen, ist man in Forschung und Entwicklung stets bemüht gewesen, den Wirkungsgradverlauf zu verbreitern, d. h. auch in vom Bestpunkt abweichenden Betriebspunkten annehmbare Wirkungsgrade zu realisieren.

Um die Mechanismen der Verlustentstehung zu begreifen und die Anteile der einzelnen Bauelemente am Gesamtverlust zu erkennen, wurden von Adrian [12] Strömungsuntersuchungen in Kreisläufen

hydrodynamischer Wandler vorgenommen. Das Ergebnis der nachfolgenden Analyse zeigt Bild 2.1.

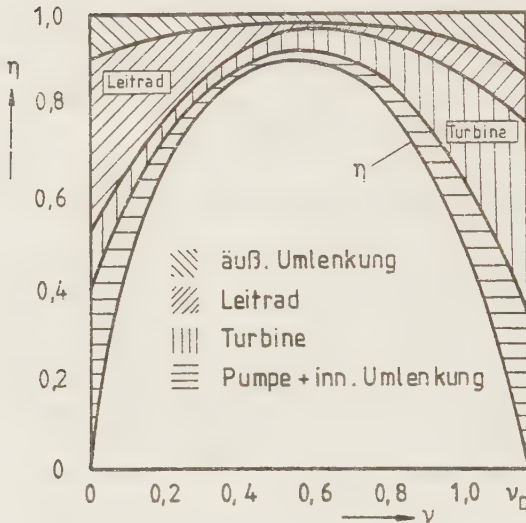


Bild 2.1: Zusammenstellung der Verluste im Wandierkreislauf aus experimentellen Daten [12]

Obwohl im Leitrad selbst keine Arbeitsvorgänge stattfinden, ist es in hohem Maße - insbesondere bei kleinen Drehzahlverhältnissen - am Gesamtverlust beteiligt. Diese Verluste im Leitrad sind kaum reibungsbedingt, sondern eine Folge der durch Fehlanströmung hervorgerufenen Ablösungsgebiete [12].

Die bisherigen Ansätze zur Vorausberechnung der Kennlinien hydrodynamischer Wandler basieren auf der eindimensionalen Stromfadentheorie, obwohl die Strömung einen räumlichen Charakter besitzt. Für die Erfassung der Verluste werden im allgemeinen empirische

Ansätze gewählt, wodurch meist nur Vorhersagen über das Betriebsverhalten im Bereich des Bestpunktes getroffen werden können. Versuche, die Strömungsverhältnisse im hydrodynamischen Wandler durch höherwertige Ansätze genauer zu erfassen, führten bislang nur zu unbefriedigenden Ergebnissen [23]. Weitere Verbesserungen oder gezielte Anpassung in vom Auslegungspunkt abweichenden Betriebsbereichen können jedoch nur mit genauer Kenntnis der Strömungsverhältnisse erfolgen. Aufgrund der komplexen Geometrien der arbeitsübertragenden und strömungsrelevanten Bauelemente besitzt die Strömung in einem hydrodynamischen Wandler in hohem Maße einen dreidimensionalen Charakter, wodurch die Lösung der problembeschreibenden partiellen Differentialgleichungen erschwert wird, und eine geschlossene analytische Lösung nicht möglich ist. Nach den Untersuchungen in [12] kann aber in guter Näherung eine inkompressible Strömung angenommen werden, wodurch die numerische Lösung des problembeschreibenden Gleichungssystems beträchtlich vereinfacht wird.

Da die Kapazität der heute verfügbaren Rechenanlagen nicht ausreicht, den gesamten Kreislauf eines hydrodynamischen Wandlers auf numerischem Wege nachzubilden, müssen die Strömungsverhältnisse in den einzelnen Bauelementen komponentenweise berechnet und auf iterativem Wege zusammengefügt werden. Weiterhin ist es aus dem gleichen Grund notwendig, die erzielten Ergebnisse in Umfangsrichtung periodisch aneinander zu reihen. Dies ist insbesondere bei der Berechnung der Strömungsverhältnisse im Leitrad möglich, da hier Einflüsse des vorgeschalteten Turbinenrades und der nachgeschalteten Pumpe meßtechnisch nicht aufgezeigt worden sind [12].

Aufgrund der Strömungsverhältnisse im hydrodynamischen Wandler muß das Rechenverfahren in der Lage sein, die dreidimensionale, inkompressible, reibungsbehaftete, stationäre, turbulente Strömung nachzubilden. Außerdem ist zu fordern, daß hinsichtlich der behandelbaren Geometrie das Rechenverfahren keinen Einschränkungen unterliegt. Dies bedeutet insbesondere, daß die den Strömungskanal berandenden Flächen keine Koordinatenflächen darstellen.

Wegen der umfassenden Anforderungen und der daraus resultierenden Komplexität der problemschreibenden Gleichungen, die im nächsten Abschnitt vorgestellt werden, ergibt sich ein schwer überschaubares Gleichungssystem.

Daher werden zur Überprüfung der Genauigkeit des Rechenverfahrens und zum Auffinden eventueller Fehler in der Programmierung Vergleiche der numerischen Lösung mit exakten Lösungen der Erhaltungsgleichungen durchgeführt.

Zum Nachweis der Leistungsfähigkeit des numerischen Lösungsverfahrens erfolgt eine Nachrechnung zweier praktisch relevanter Beispiele:

- die Strömung in einem um 90° umlenkenden Kanal mit gleichbleibendem quadratischem Querschnitt;
- die Strömung in einem Leitrادkanal eines hydrodynamischen Wandlers für verschiedene Betriebspunkte.

Hierbei bestätigt ein Vergleich zwischen aus der Literatur bekannten Meßergebnissen und den Rechenergebnissen die Güte des numerischen Lösungsverfahrens.

2.2 Die problembeschreibenden Gleichungen

Eine theoretische Analyse von Strömungsvorgängen kann grundsätzlich auf zwei Arten durchgeführt werden, nach der sogenannten Lagrange- und der Euler-Methode.

1. Bei der Lagrange- bzw. historischen Methode wird jedes individuelle Fluidteilchen längs seiner Bahn betrachtet und dessen Bewegung durch die entsprechenden unabhängigen Gleichungen beschrieben, wobei man das bewegte Fluid physikalisch als Punkthaufen auffaßt. Die numerische Lösung der sich ergebenden Gleichungen erfordert einen beträchtlichen mathematischen Aufwand. Als Vorteil dieser Methode treten in den Bewegungsgleichungen keine konvektiven Terme auf, wodurch sich lineare Bewegungsgleichungen ergeben, die entsprechend einfacher gelöst werden können.
2. Bei der Euler'schen oder statistischen Methode interessiert nicht die Betrachtung des einzelnen Fluidteilchens, sondern es werden Geschwindigkeit, Beschleunigung, Druck, Temperatur . . . verschiedener Teilchen an einem bestimmten Ort registriert. Im Unterschied zur Lagrange'schen Methode wechselt die beobachtete Substanz ständig. Die Beschreibung der lokalen zeitlichen und der konvektiven Änderungen von Massen-, Impuls- und Energieströmen durch ein im Raum fixiertes infinitesimales Volumenelement führt zu der sogenannten konservativen Form der Erhaltungsgleichungen, die bei der numerischen Lösung Vorteile aufweist.

Diese letztgenannte Vorgehensweise, die Euler'sche Betrachtungsweise, liefert für eine instationäre, dreidimensionale, inkompressible, reibungsbehaftete Strömung folgende in differentieller Form geschriebene Kontinuitäts- und Impulserhaltungsgleichung (Navier-Stokes-Gleichung) für die Ermittlung der Komponenten des Geschwindigkeitsvektors $\vec{u} = (u, v, w)$ und des Druckes p :

Kontinuitätsgleichung:

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = 0 \quad (2.1)$$

Impulserhaltungsgleichung (Navier-Stokes-Gleichung):

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} \vec{u} - \underline{\underline{\Pi}}) = \vec{g} \rho \quad (2.2)$$

Der Spannungstensor $\underline{\underline{\Pi}}$ ist durch den Navier-Stokes' schen Ansatz [14]

$$\underline{\underline{\Pi}} = - p \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{g}} \quad (2.3)$$

gegeben, wobei der viskose Anteil $\underline{\underline{g}}$ Normal- und Schubspannungen enthält. Der Zusammenhang zwischen dem Spannungs- und dem Deformationszustand ist für isotrope Newton' sche Fluide (z. B. Wasser) linear [26]. Für ein hier vorausgesetztes inkompressibles Fluid gilt:

$$\underline{\underline{g}} = 2 \mu \text{def } \vec{u} \quad (2.4)$$

mit $\text{def } \vec{u} = 0,5 [\vec{\nabla} \vec{u} + (\vec{\nabla} \vec{u})^t]$. In diesen Beziehungen ist μ die dynamische Viskosität und $\text{def } \vec{u}$ der Tensor der Formänderungsgeschwindigkeit, der den Verzerrungszustand eines Fluidelementes kennzeichnet [24].

Die oben angegebenen Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls, d. h. die Kontinuitäts- und die Navier-Stokes-Gleichung, beschreiben zwar auch turbulente Bewegungsvorgänge exakt, lassen sich aber wegen der viel zu geringen Speicherkapazität und Rechengeschwindigkeit heutiger Rechenanlagen für praktisch relevante turbulente Strömungen nicht lösen. Daher führt man eine statistische Betrachtungsweise ein und spaltet die Momentanwerte der Geschwindigkeit $\vec{u}(t)$ und des Druckes $p(t)$ in Mittel- und Schwankungswerte auf [26]:

$$\vec{u}(t) = \overline{\vec{u}} + \vec{u}'(t) \quad (2.5)$$

und

$$p(t) = \overline{p} + p'(t) \quad (2.6)$$

wobei die zeitlichen Mittelwerte durch

$$\bar{\vec{u}} = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \vec{u}(t) dt \quad (2.7)$$

und

$$\bar{p} = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} p(t) dt \quad (2.8)$$

gegeben sind, wenn t_0 eine im Vergleich zur Periodendauer der Schwankungsbewegung große Zeitspanne darstellt.

Führt man in Gleichung (2. 1) und (2. 2) die Beziehungen (2. 5) und (2. 6) ein und mittelt anschließend wie in Gleichung (2. 7) bzw. (2. 8) angedeutet, so ergeben sich folgende Beziehungen:

Kontinuitätsgleichung:

$$(\vec{\nabla} \cdot \bar{\vec{u}}) = 0 \quad (2.9)$$

Impulserhaltungsgleichung:

$$\frac{\partial(\rho \bar{\vec{u}})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \bar{\vec{u}} \bar{\vec{u}} - \bar{\underline{\underline{\tau}}} - \bar{\underline{\underline{\tau}}}_t) = \vec{g} \rho \quad (2.10)$$

Diese Gleichungen beschreiben die räumliche und temporäre Verteilung der zeitlichen Mittelwerte der Strömungsgrößen $\vec{u}$ und p [26]. Der zusätzliche Term $\bar{\underline{\underline{\tau}}}_t$ resultiert aus der zeitlichen Mittelwertbildung der nichtlinearen Terme, und dessen Elemente werden als die Reynolds' schen Spannungen bezeichnet [27]. Wegen der kürzeren Schreibweise wird im folgenden auf die Kennzeichnung zeitlicher Mittelwerte durch Querstriche verzichtet.

Die Reynolds' schen Spannungen beschreiben physikalisch den Austausch von Impuls durch die turbulente Schwankungsbewegung und wirken auf das Fluid wie eine Spannung [26]. Die zeitlich gemitt-

telte Kontinuitätsgleichung (2. 9) und der zeitlich gemittelte Impulssatz (2. 10) gelten noch exakt, da zu ihrer Ableitung keinerlei Vereinfachungen in die Rechnung eingeflossen sind; sie bilden aber kein geschlossen lösbares Gleichungssystem mehr. Zur Schließung des Gleichungssystems muß nach Schlichting [26] ein Turbulenzmodell in die Rechnung eingebracht werden, das die Terme $\underline{\Pi}_t$ z. B. in Beziehung zu zeitlichen Mittelwerten der Geschwindigkeit setzt.

Einer der ersten Vorschläge zur Modellierung der neu hinzugekommenen Reynolds' schen Spannungen stammt von Boussinesq und setzt diese proportional dem Gradienten der zeitlich gemittelten Geschwindigkeit:

$$\underline{\Pi}_t = 2 \mu_t \operatorname{def} \bar{\underline{u}}$$

Der Proportionalitätsfaktor μ_t wird als turbulente oder Wirbel-Viskosität bezeichnet und ist keine Stoffgröße. Er hängt vom Zustand der Turbulenz ab und wird in dieser Arbeit durch den Mischungswegansatz von Prandtl berechnet. Für dreidimensionale turbulente Strömungen kann gemäß Moore [28] folgender Ansatz verwendet werden:

$$\mu_t = \rho l^2 \sqrt{2 \bar{\nabla} \underline{u} : \operatorname{def} \bar{\underline{u}}} \quad (2. 11)$$

der dort zur Berechnung einer 90°-Umlenkung mit variablem Querschnitt mit Erfolg eingesetzt wurde und wobei der Faktor l^2 von der Geometrie abhängt.

Die durch die Gleichungen (2. 9) und (2. 10) beschriebenen Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls werden über ein Volumen V mit der Oberfläche A integriert. Dieses Volumen darf sich mit einer frei wählbaren Geschwindigkeit $\bar{\underline{U}}$ bewegen. Auf diese Weise entstehen mit Hilfe des Gauß' schen Satzes die Erhaltungsgleichungen in integraler Form:

$$\int_A \rho (\bar{\underline{u}} - \bar{\underline{U}}) \cdot \bar{\underline{n}} \, dA = 0 \quad (2. 12)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \bar{\underline{u}} \cdot \bar{\underline{n}} \, dV = \int_A [\bar{\underline{n}} \cdot (\bar{\underline{\Pi}} - \bar{\underline{U}})] \rho \bar{\underline{u}} \, dA =$$

$$\int_A \bar{\underline{n}} \cdot (\bar{\underline{\Pi}} + \underline{\Pi}_t) \, dA + \int_V \bar{\underline{g}} \rho \, dV \quad (2. 13)$$

Hierbei ist $\vec{n}$ der nach außen gerichtete Normalenvektor. Für $\vec{U} = \vec{0}$ liegen diese Beziehungen in der Euler'schen Betrachtungsweise, für $\vec{U} = \vec{u}$ in der Lagrange'schen Form vor [25].

2.3 Die numerische Lösung der Erhaltungsgleichungen

Die numerische Lösung der vollständigen Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls (2. 1) und (2. 2) ist zum einen aufgrund der mathematischen Komplexität und zum anderen wegen der sehr großen Anforderungen an die Rechnerkapazität und Rechengeschwindigkeit schwierig. In der Vergangenheit wurden daher verschiedene Ansätze gemacht, die Komplexität des zu lösenden Gleichungssystems durch physikalisch motivierte Annahmen zu reduzieren. Die Berücksichtigung solcher vereinfachender Annahmen betrifft insbesondere die Navier-Stokes-Gleichung, die dann mit beträchtlich geringerem Aufwand auf numerischem Wege gelöst werden kann.

Patankar und Spalding [17] behandeln eine Strömung mit parabolischem Charakter, die keine Querdrukgradienten, Ablösungsgebiete mit Rückströmung oder keinen stromaufwärtsgerichteten diffusiven Impulstransport aufweist. Bei solchen Strömungen können die diffusiven Terme in Strömungsrichtung aus den vollständigen Navier-Stokes-Gleichungen herausgestrichen werden, und man erhält die sogenannten parabolisierten Navier-Stokes-Gleichungen. Die so vereinfachten Gleichungen erlauben numerisch vom Eintritt aus ein schrittweises Durchrechnen durch das gesamte Rechengebiet ("marching-technique"). Diese Vereinfachungen sind aber nicht sinnvoll bei Problemen in denen z. B. eine Strömungsumlenkung einen Querdrukgradienten erzeugt, der sich entgegen der Durchflußrichtung auch stromaufwärts auf die Strömungsverhältnisse auswirkt. Jedoch werden auch bei diesen Strömungen die in Strömungsrichtung wirkenden diffusiven Terme nicht berücksichtigt und Ablösungsfreiheit vorausgesetzt. Berücksichtigt der Ansatz elliptische Effekte, die über das Druckfeld in das gesamte Strömungsfeld weitergegeben werden, so bezeichnet man die entstehenden Gleichungen als partiell-parabolisierte Navier-Stokes-Gleichungen, deren Lösung in Strömungsrichtung iterativ ermittelt wird. Moore [28] benutzt diese vereinfachten Gleichungen zur Berechnung der Druckverluste eines 90°-Krümmers, während

Zahn [8] die Strömung in Umlenkanälen in Turbomaschinen untersucht. Tasche [9] transformiert die partiell-parabolisierten Navier-Stokes-Gleichungen in ein allgemeines, krummliniges, konturangepaßtes Koordinatensystem, um die Strömung in allgemeinen Geometrien zu berechnen.

Bei auftretenden Ablösungsgebieten bzw. Rückströmzonen wird die numerische Lösung der vollständigen, im Raum elliptischen und in der Zeit parabolischen Navier-Stokes-Gleichungen erforderlich. Insbesondere am Austritt des Rechengebietes sind dann Randbedingungen anzugeben, was im allgemeinen große Probleme beinhaltet. Beispiele für die numerische Lösung der vollständigen Navier-Stokes-Gleichungen wurden von Moore [7], Neumann [10], Harlow [18] und Hirt [19] veröffentlicht. Bei diesen Verfahren sind Auswirkungen örtlicher Störungen im Druck- und Geschwindigkeitsfeld im gesamten Lösungsgebiet festzustellen. Die das Strömungsverhalten beschreibenden Gleichungssysteme werden aber sehr groß, so daß leistungsfähige Rechenanlagen zur Behandlung dreidimensionaler Probleme zur Verfügung stehen müssen.

2.4 Auswahl des Diskretisierungsverfahrens

Obwohl im Rahmen dieser Arbeit nur Lösungen der stationären Bewegungsgleichungen (2. 1) und (2. 2) gesucht werden, sind hier die Ausgangspunkte die instationären, vollständigen Bewegungsgleichungen. Dieses Vorgehen besitzt unter anderen folgende Vorteile:

- die zeitabhängigen Bewegungsgleichungen besitzen parabolischen Charakter; sie können daher mit bewährten, numerischen Methoden gelöst werden, die speziell für Gleichungen vom parabolischen Typ optimiert sind,
- bei vielen Anwendungsfällen ist nicht bekannt, ob überhaupt eine stationäre Lösung existiert, so daß ein auf den stationären Gleichungen basierendes Rechenverfahren dann versagt;
- es besteht die Möglichkeit, auch wirklich instationäre Strömungsvorgänge zu behandeln.

Das Strömungsfeld eines inkompressiblen Fluids wird durch die physikalischen Größen Druck und Geschwindigkeit gekennzeichnet. Die gegenseitige Beeinflussung und Auswirkung von außen einwirkender Kräfte auf diese Größen wird durch die Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls beschrieben. Prinzipiell findet bei der numerischen Lösung dieses nicht-linearen partiellen Differentialgleichungssystems (bzw. der äquivalenten Integralgleichungen) eine Überführung in ein System vieler algebraischer Gleichungen statt. Dazu wird, z. B. bei Differenzenverfahren, das als Kontinuum angesehene Lösungsgebiet mit einem aus diskreten Punkten bestehenden Maschennetz überzogen, wobei z. B. in dessen Knoten die unbekannten Feldgrößen definiert sind [2, 3]. Dieses in Bild 2.2 a dargestellte sogenannte nicht-versetzte Gitter ermöglicht eine einfache Behandlung der Randbedingungen und weist im Falle allgemeiner, krummliniger Koordinaten Vorteile auf. Nachteilig bei dieser Art der Stützstellenanordnung sind bei der numerischen Lösung jedoch Entkopplungserscheinungen im Druck- und im Geschwindigkeitsfeld, deren Elimination künstliche Dämpfungsglieder erfordern. Dieser wesentliche Nachteil des nicht-versetzten Gitters tritt bei dem in Bild 2.2 b dargestellten versetzten Gitter nicht auf. Hierbei sind Druck und Geschwindigkeitskomponenten an unterschiedlichen Orten abgespeichert. Diese Anordnung ermöglicht eine enge Kopplung von Druck- und Geschwindigkeitsfeld, wodurch numerische Entkopplungserscheinungen ausgeschlossen sind [30].



Bild 2.2: Verschiedene Möglichkeiten der Stützstellenanordnung

Bei allgemeinen, krummlinigen Koordinaten erfordert diese Gitteranordnung jedoch komplizierte Interpolationsvorschriften zur Berechnung der dann auftretenden kontravarianten Geschwindigkeitskomponenten.

Die in Bild 2.2 c dargestellte Art des versetzten Gitters wird erstmals von Amsden und Hirt [20] verwandt und ermöglicht neben einer einfachen Behandlung der Randbedingungen für die Geschwindigkeit eine sehr große Flexibilität des Maschennetzes, wodurch keine Einschränkungen in Bezug auf die behandelbaren Geometrien erforderlich werden. Als zusätzlicher Vorteil, der auch für eine versetzte Stützstellenanordnung gemäß Bild 2.2 b gilt, müssen keine Randbedingungen für den Druck angegeben werden [4, 5]. Allerdings treten bei Verwendung der zuletzt vorgestellten Stützstellendefinition wiederum leichte Entkopplungen im Druckfeld auf, die aber z. B. durch Filterprozesse ausgeglichen werden können [32].

Unabhängig von der zugrundegelegten Stützstellenanordnung findet man wegen der Nichtlinearität die Lösung der Bewegungsgleichungen als eine Folge vieler Iterationen, wobei sich die Werte der Variablen der $(n+1)$ -ten Iteration in expliziter oder impliziter Weise aus dem System algebraischer Gleichungen ergeben, in das Werte der vorausgehenden n -ten Iteration eingesetzt worden sind.

Es stehen grundsätzlich drei Methoden zur Diskretisierung der problembeschreibenden Differentialgleichungen zur Verfügung, wenn konturangepaßte Maschennetze benutzt werden.

Zunächst ist es möglich, die partiellen Differentialgleichungen in ein konturangepaßtes Koordinatensystem zu transformieren, so daß die berandenden Flächen Koordinatenflächen darstellen. Nachteilig hierbei ist, daß durch die Transformation zusätzliche Terme in die Gleichungen eingebracht werden. Die Berechnung dieser die Koordinatentransformation beschreibenden Metrikkoeffizienten kann für die hier betrachteten Fälle nicht auf analytischem Wege erfolgen und muß besonders sorgfältig ausgeführt werden.

Dieser Nachteil tritt bei der zweiten, hier verwendeten Vorgehensweise, nicht in Erscheinung. Hierbei werden, unter Zugrundelegung eines kartesischen Koordinatensystems, die Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls, ausgehend von ihrer Integralform im physikalischen Raum, diskretisiert. Es ergibt sich eine sehr flexible Handhabung auch komplexer Geometrien, wobei als zusätzliche Vorteile die globale Erhaltung von Masse und Impuls gewährleistet sind. Diese Vorgehensweise ist als Finite-Volumen-Verfahren bekannt, während man die erstgenannte Methode als Finite-Differenzen-Verfahren bezeichnet. Bei einem Finite-Differenzen-Verfahren kann allerdings nach Rizzi [13] eine numerische Analyse von Genauigkeits- und Stabilitätseigenschaften des Algorithmus einfacher durchgeführt werden.

In letzter Zeit setzt man vermehrt auch die aus der Mechanik bekannten Finite-Element-Verfahren ein. Ziel hierbei ist es, die vorliegenden partiellen Differentialgleichungen auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zu reduzieren, die dann mit bewährten Methoden gelöst werden können [14]. Die Finite-Element-Verfahren erlauben eine systematische Entwicklung numerisch stabiler Algorithmen, die durch eine einfache Einbeziehung auch komplizierter Berandungen eine flexible Handhabung ermöglichen. Im Gegensatz zu den Finite-Volumen-Verfahren führen sie insbesondere im dreidimensionalen Raum zu umfangreichen Matrizen, die invertiert werden

müssen. Hinzu kommen eine komplexe Programmierung und zusätzlicher Speicherbedarf [16].

Wegen dieser Nachteile der Finite-Differenzen- und der Finite-Element-Verfahren wird in dieser Arbeit ein Finite-Volumen-Verfahren gewählt.

Zusammenfassend ergibt sich für das physikalische Modell, daß es eine turbulente, dreidimensionale, stationäre, inkompressible Strömung beschreiben muß, während an das Rechenverfahren folgende Forderungen zu stellen sind [31]:

- numerische Lösung der problembeschreibenden Gleichungen (2. 12) und (2. 13); befriedigende Genauigkeit bei geringer Stützstellenanzahl;
- keine Einschränkungen in Bezug auf die Gestalt der berechenbaren Geometrien;
- Wirtschaftlichkeit durch geringen Speicherbedarf und kurze Rechenzeiten.

Ein Finite-Volumen-Verfahren erfüllt diesen Forderungskatalog in allen Punkten, weswegen die Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls [Gleichung (2. 12) und (2. 13)] mit Hilfe eines solchen Verfahrens diskretisiert werden.

3. Theoretische Ableitung des Rechenverfahrens zur Lösung der dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichung

Im dreidimensionalen Fall stehen zur Berechnung der vier unbekannten Größen, dem Druck p und den drei Komponenten des Geschwindigkeitsvektors, die skalare Kontinuitätsgleichung (2. 12) und der vektorielle Impulserhaltungssatz (2. 13) zur Verfügung. Die Berechnung des Druckes p ist besonders schwierig, da nur der Gradient des Druckes in den problembeschreibenden Gleichungen erscheint und demnach keine Gleichung zur Verfügung steht, die explizit nach dem unbekannten Druck p aufgelöst werden kann. Aus diesen Gleichungen werden für das hier angewandte Verfahren im folgenden Beziehungen für die Berechnung der Unbekannten abgeleitet. Basis des Rechenverfahrens ist die von Amsden und Hirt [20, 36] veröffentlichte ALE (Arbitrary-Lagrangian-Eulerian)-Technik.

Bei diesem Finite-Volumen-Verfahren resultieren die Differenzengleichungen aus einer Integration der zu lösenden Gleichungen. Wird das Rechengebiet in viele Zellen aufgeteilt, so lassen sich Beziehungen für jedes dieser Kontrollvolumina aufstellen. Diese Vorgehensweise erlaubt die Behandlung auch komplexer Geometrien, ohne die Differentialgleichungen in konturangepaßte, krummlinige Koordinatensysteme transformieren zu müssen. Die einzig notwendige geometrische Vorgabe besteht in der Definition der Eckpunktkoordinaten des einzelnen Kontrollvolumens.

Der folgende Abschnitt behandelt im einzelnen die Vorgehensweise bei der Diskretisierung der Kontinuitäts- und der Impulserhaltungsgleichung. Zunächst folgt eine Beschreibung der getroffenen Annahmen und Vereinbarungen sowie die Berechnung einiger Hilfsgrößen, z. B. das Volumen einer Masche, die während der Rechnung wiederholt benötigt werden. Der Vorstellung der Approximation der zeitlichen Ableitungen schließt sich die ausführliche Herleitung der Differenzenausdrücke für die räumlichen Differentiale an. Zur vollständigen Beschreibung des mathematischen Modells gehören noch:

- die Behandlung der Randbedingungen
- das Turbulenzmodell

3.1 Die Erhaltungsgleichungen: für Masse und Impuls

Ausgangspunkte sind die zeitlich gemittelten Erhaltungsgleichungen in integraler Form, wobei für die Kontinuitätsgleichung (2. 12)

$$\int_A \rho (\vec{u} - \vec{U}) \cdot \vec{n} \, dA = 0 \quad (3. 1)$$

und für den Impulssatz (2. 13) die Beziehung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{u} \, dV + \int_A [\vec{n} \cdot (\vec{u} - \vec{U})] \rho \vec{u} \, dA - \\ \int_A \vec{n} \cdot \underline{\underline{\Pi}}_G \, dA = \int_V \vec{g} \rho \, dV \end{aligned} \quad (3. 2)$$

gelten. Die Einheitsvektoren in x-, y- und z-Richtung werden mit $\vec{i}$, $\vec{j}$ und $\vec{k}$ bezeichnet. Ein Ortsvektor $\vec{x}$ ergibt sich damit zu

$$\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

während der Nabla-Operator als

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

geschrieben werden kann. Für den zu einem Punkt P(x,y,z) gehörenden Geschwindigkeitsvektor $\vec{u}$ gilt gemäß Bild 3.1:

$$\vec{u} = u(x,y,z,t) \vec{i} + v(x,y,z,t) \vec{j} + w(x,y,z,t) \vec{k}$$

Im Tensor der Gesamtspannung $\underline{\underline{\Pi}}_G$ sind die Normal- und Schubspannungen und die aus der zeitlichen Mittelwertbildung der nicht-linearen konvektiven Terme resultierenden Reynolds' schen Spannungen zusammengefaßt.

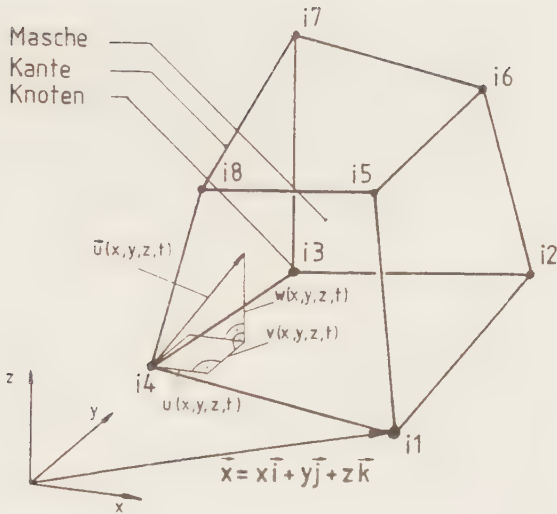


Bild 3.1: Masche mit Orts- und Geschwindigkeitsvektor im kartesischen Koordinatensystem

Es gilt für inkompressible Fluide:

$$\underline{\underline{\tau}}_g = - p \underline{\underline{I}} + 2 \mu_g \text{ def } \vec{u} \quad (3.3)$$

wobei die effektive Viskosität μ_g durch

$$\mu_g = \mu + \mu_t$$

beschrieben ist. Der Deformationstensor $\text{def } \vec{u}$ ist laut Definition durch

$$\text{def } \vec{u} = \frac{1}{2} [(\vec{\nabla} \vec{u}) + (\vec{\nabla} \vec{u})^t]$$

gegeben. Mit der für ein kartesisches Koordinatensystem angegebenen Dyade $(\vec{\nabla} \vec{u})$

$$\begin{aligned}
 (\vec{\nabla} \vec{u}) &= \left(\sum_i \vec{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left(\sum_j \vec{\delta}_j u_j \right) \\
 &= \vec{i}\vec{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \vec{i}\vec{j} \frac{\partial v}{\partial x} + \vec{i}\vec{k} \frac{\partial w}{\partial x} \\
 &\quad + \vec{j}\vec{i} \frac{\partial u}{\partial y} + \vec{j}\vec{j} \frac{\partial v}{\partial y} + \vec{j}\vec{k} \frac{\partial w}{\partial y} \\
 &\quad + \vec{k}\vec{i} \frac{\partial u}{\partial z} + \vec{k}\vec{j} \frac{\partial v}{\partial z} + \vec{k}\vec{k} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

lautet der Spannungstensor nach Gleichung (3.3)

$$\underline{\underline{\Pi}}_g = \begin{bmatrix} -p + 2\mu_g \frac{\partial u}{\partial x} & \mu_g \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \mu_g \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \mu_g \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & -p + 2\mu_g \frac{\partial v}{\partial y} & \mu_g \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \mu_g \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \mu_g \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & -p + 2\mu_g \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

3.2 Die Diskretisierung der Bewegungsgleichungen

In den Bewegungsgleichungen in integraler Form (3.1) und (3.2) tauchen neben einem Volumenintegral nur noch Integraalausdrücke auf, die über die Oberfläche des Kontrollvolumens zu bilden sind.

Um diese Integralgleichungen in algebraische Gleichungen zu überführen, müssen Annahmen über den Funktionsverlauf der Geschwindigkeit $\vec{u} = \vec{u}(x,y,z,t)$ und über den Verlauf des Druckes $p = p(x,y,z,t)$ getroffen werden. Damit erfolgt jedoch nur noch eine angenäherte Wiedergabe der ursprünglichen Gleichungen.

3.2.1 Grundlegende Vorgehensweise und Vereinbarungen

Zur Diskretisierung der Bewegungsgleichungen muß das bisher als Kontinuum angesehene Lösungsgebiet in eine Vielzahl diskreter Punkte aufgeteilt werden. Die Anzahl der erforderlichen Gitter- oder Maschenpunkte richtet sich einerseits nach der im Modell berücksichtigten Zahl der räumlichen Dimensionen und andererseits nach der geforderten Genau-

igkeit und der Komplexität der Geometrie des Lösungsgebietes. Durch geradliniges Verbinden dieser Punkte entstehen im dreidimensionalen Raum Hexaeder, die das Maschennetz bilden. Die Punkte selbst werden als Knoten und die verbindenden Geradenstücke als Kanten bezeichnet. Bild 3.2 zeigt das Rechengebiet mit einer typischen Masche oder regulären Zelle.

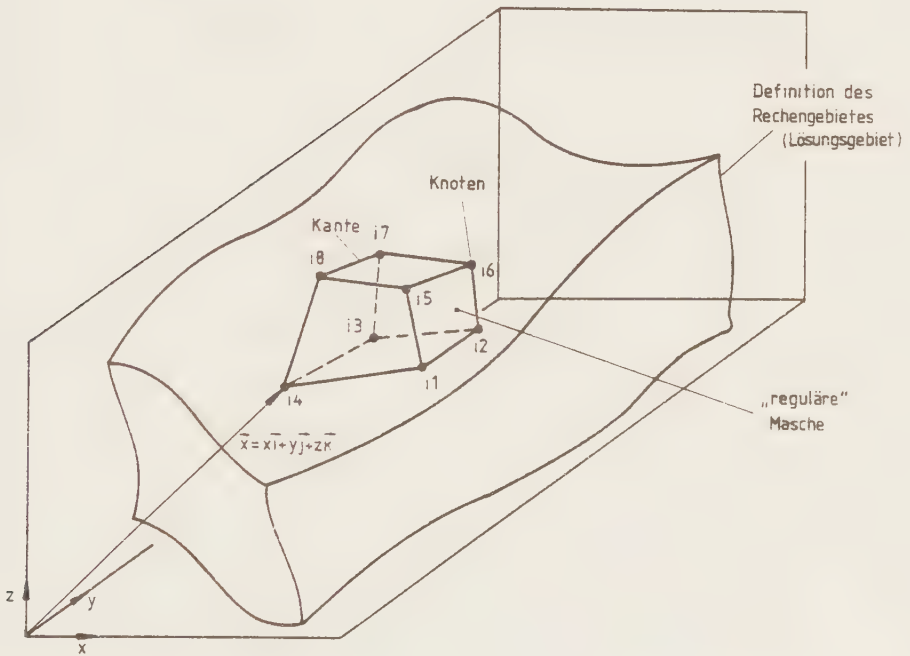


Bild 3.2: Definition des Rechengebietes

Die Positionsbeschreibung eines Knotens im physikalischen Raum erfolgt durch das Koordinatentripel (x,y,z) , das die Komponenten

des Ortsvektors $\vec{x}$ darstellt. Die zu einer Zelle gehörenden acht Knoten werden durch ein lokales Numerierungssystem $i1$ bis $i8$ gekennzeichnet (Bild 3.2). Im logischen Raum wird nach Bild 3.3 ein Knoten der Masche durch Angabe eines Zahlentripels, z. B. (i,j,k) , eindeutig festgelegt, wodurch die ganzzahligen Indizes i , j und k eine Koordinatenfunktion zugewiesen bekommen.

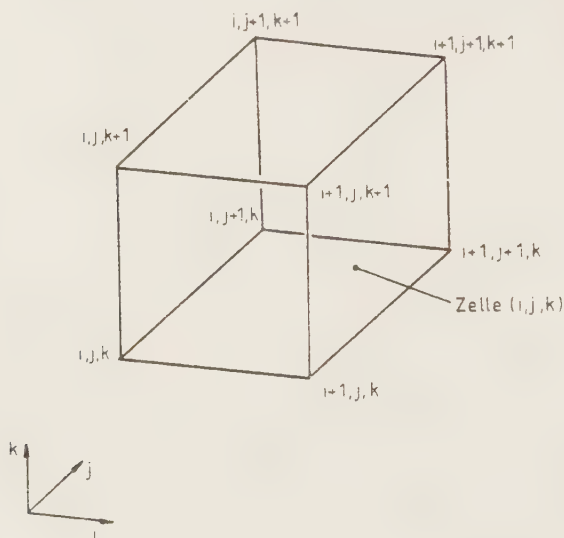


Bild 3.3: Darstellung einer Masche im logischen Raum

Die Indizes (i,j,k) kennzeichnen auch die einzelnen Zellen des physikalischen Gitternetzes, wobei nach Vereinbarung der Knoten (i,j,k) im lokalen Numerierungssystem der Zelle (i,j,k) den Index $i4$ erhält. Die gesamte lokale Numerierung ergibt sich dann durch die folgende Zuordnung:

$i1 := i+1, j, k$	$i5 := i+1, j, k+1$
$i2 := i+1, j+1, k$	$i6 := i+1, j+1, k+1$
$i3 := i, j+1, k$	$i7 := i, j+1, k+1$
$i4 := i, j, k$	$i8 := i, j, k+1$

Die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors u , v und w in x -, y - bzw. z -Richtung sind in den Knoten und der Druck im Mittelpunkt einer regulären Zelle angeordnet. Unter Zugrundelegung des oben eingeführten Indizierungssystems ist z. B. die im Knoten i_4 der Zelle (i,j,k) angeordnete Geschwindigkeitskomponente in x -Richtung durch $u(i_4)$ oder u_{ijk} gegeben. Der dieser Zelle zugeordnete Druck wird dementsprechend mit $p(i_4)$ oder p_{ijk} bezeichnet. Zur vereinfachten Schreibweise der umfangreichen Differenzengleichungen verkürzt man z. B. $i+1, j+1, k+1$ durch $ipjpkp$.

Die sechs Oberflächen einer Zelle bezeichnet man gemäß der Darstellung in Bild 3.4 :

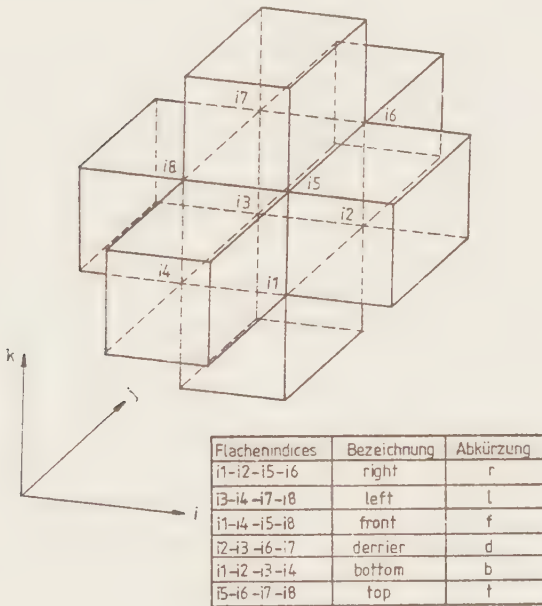


Bild 3.4: Bezeichnung der Oberflächen einer regulären Zelle

Anmerkung: Die Koordinaten i , j , k des logischen Raumes müssen nicht mit den Richtungen des kartesischen Koordinatensystems zusammenfallen.

Für die Approximation der Gleichung (3. 2) ist es notwendig, das Volumen jeder einzelnen Masche zu bestimmen, wozu die Literatur [33, 34] verschiedene Vorgehensweisen anbietet. Die hier benutzte Möglichkeit ist von Amsden in [35] beschrieben worden. Hierbei wird eine Transformation der kartesischen Koordinaten auf ein ξ, η, ζ -Koordinatensystem durchgeführt. Sind $\vec{x}_{i1}, \vec{x}_{i2}, \dots, \vec{x}_{i8}$ die Ortsvektoren der Knoten einer Masche, so lautet nach [35] die trilineare Interpolationsvorschrift für den Ortsvektor $\vec{x}$, wenn die Interpolationsvariablen ξ, η, ζ zwischen 0 und 1 variieren:

$$\begin{aligned} \vec{x} = & [\vec{x}_{i1} \xi(1-\eta) + \vec{x}_{i2} \xi \eta + \vec{x}_{i3} (1-\xi) \eta + \vec{x}_{i4} (1-\xi)(1-\eta)] (1-\zeta) \\ & + [\vec{x}_{i5} \xi(1-\eta) + \vec{x}_{i6} \xi \eta + \vec{x}_{i7} (1-\xi) \eta + \vec{x}_{i8} (1-\xi)(1-\eta)] \zeta \quad (3. 6) \end{aligned}$$

Durch die Transformationsvorschrift (3. 6) wird eine Masche auf den Einheitswürfel abgebildet (Bild 3.5).

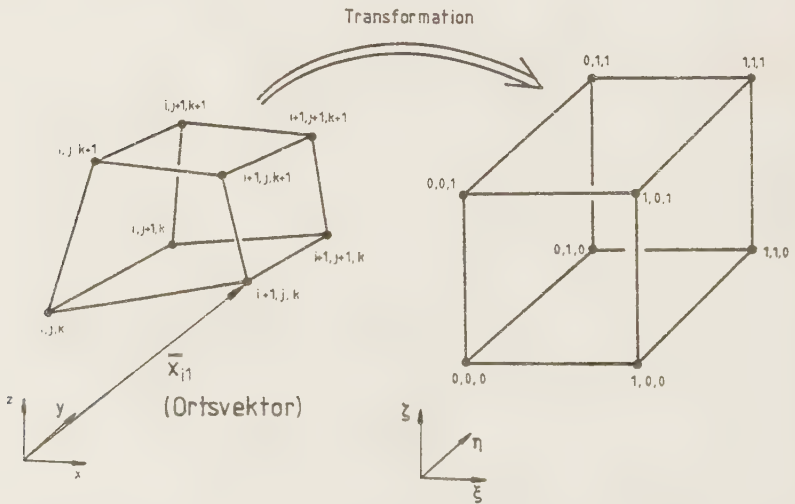


Bild 3.5: Abbildung einer Masche im physikalischen Raum auf den Einheitswürfel im logischen Raum

Das Volumen einer Masche ist dann durch Bilden der Funktionaldeterminante und Auswerten von

$$V = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} d\xi d\eta d\zeta \quad (3.7)$$

zu berechnen. Die Funktionaldeterminante beschreibt dabei die Raumverzerrung, die die Masche bei der Abbildung des physikalischen Raumes auf das ξ, η, ζ -Koordinatensystem erfährt. Wird die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} = x_\xi(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta) - x_\eta(y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi) + x_\zeta(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)$$

mit den partiellen Ableitungen nach Gleichung (3.6) ausgedrückt, so ist das gesuchte Volumen einer Masche (i,j,k) V_{ijk} gegeben durch:

$$V_{ijk} = \frac{1}{12} \sum_{l=1}^8 x_l \cdot C_l \quad (3.8)$$

wobei die x_l die x-Koordinaten der Knoten dieser Zelle sind, und die Koeffizienten C_l durch folgende Beziehungen bestimmt werden:

$$C_1 = - (y_2 z_3 + y_2 z_4 - y_2 z_5 - y_2 z_6 - y_3 z_2 + y_3 z_4 - y_4 z_2 - y_4 z_3 + y_4 z_5 + y_4 z_8 + y_5 z_2 - y_5 z_4 + y_5 z_6 - y_5 z_8 + y_6 z_2 - y_6 z_5 - y_8 z_4 + y_8 z_5)$$

$$C_2 = + (y_1 z_3 + y_1 z_4 - y_1 z_5 - y_1 z_6 - y_3 z_1 - y_3 z_4 + y_3 z_6 + y_3 z_7 - y_4 z_1 + y_4 z_3 + y_5 z_1 - y_5 z_6 + y_6 z_1 - y_6 z_3 + y_6 z_5 - y_6 z_7 - y_7 z_3 + y_7 z_6)$$

$$C_3 = - (y_1 z_2 - y_1 z_4 - y_2 z_1 - y_2 z_4 + y_2 z_6 + y_2 z_7 + y_4 z_1 + y_4 z_2 - y_4 z_7 - y_4 z_8 - y_6 z_2 + y_6 z_7 - y_7 z_2 + y_7 z_4 - y_7 z_6 + y_7 z_8 + y_8 z_4 - y_8 z_7)$$

$$C_4 = - (y_1 z_2 + y_1 z_3 - y_1 z_5 - y_1 z_8 - y_2 z_1 + y_2 z_3 \\ - y_3 z_1 - y_3 z_2 + y_3 z_7 + y_3 z_8 + y_5 z_1 - y_5 z_8 \\ - y_7 z_3 + y_7 z_8 + y_8 z_1 - y_8 z_3 + y_8 z_5 - y_8 z_7)$$

$$C_5 = + (y_1 z_2 - y_1 z_4 + y_1 z_6 - y_1 z_8 - y_2 z_1 + y_2 z_6 \\ + y_4 z_1 - y_4 z_8 - y_6 z_1 - y_6 z_2 + y_6 z_7 + y_6 z_8 \\ - y_7 z_6 + y_7 z_8 + y_8 z_1 + y_8 z_4 - y_8 z_6 - y_8 z_7)$$

$$C_6 = + (y_1 z_2 - y_1 z_5 - y_2 z_1 + y_2 z_3 - y_2 z_5 + y_2 z_7 \\ - y_3 z_2 + y_3 z_7 + y_5 z_1 + y_5 z_2 - y_5 z_7 - y_5 z_8 \\ - y_7 z_2 - y_7 z_3 + y_7 z_5 + y_7 z_8 + y_8 z_5 - y_8 z_7)$$

$$C_7 = + (y_2 z_3 - y_2 z_6 - y_3 z_2 + y_3 z_4 - y_3 z_6 + y_3 z_8 \\ - y_4 z_3 + y_4 z_8 + y_5 z_6 - y_5 z_8 + y_6 z_2 + y_6 z_3 \\ - y_6 z_5 - y_6 z_8 - y_8 z_3 - y_8 z_4 + y_8 z_5 + y_8 z_6)$$

$$C_8 = - (y_1 z_4 - y_1 z_5 - y_3 z_4 + y_3 z_7 - y_4 z_1 + y_4 z_3 \\ - y_4 z_5 + y_4 z_7 + y_5 z_1 + y_5 z_4 - y_5 z_6 - y_5 z_7 \\ + y_6 z_5 - y_6 z_7 - y_7 z_3 - y_7 z_4 + y_7 z_5 + y_7 z_6)$$

Die in dem Kontrollvolumen enthaltene Masse M_{ijk} ergibt sich dann aus:

$$M_{ijk} = \rho V_{ijk} \quad (3.9)$$

Zusätzlich zu diesem Maschennetz wird zur Integration des Impulserhaltungssatzes (3.2) das Lösungsgebiet mit einem zweiten Maschennetz überdeckt, das aber eng mit dem ersten verknüpft ist.

Zur besseren Unterscheidung werden die Elemente des ersten Gitternetzes als reguläre Zelle oder Masche bezeichnet. Bild 3.6 zeigt die Zentrierung des Kontrollvolumens zur Integration der Impulser-

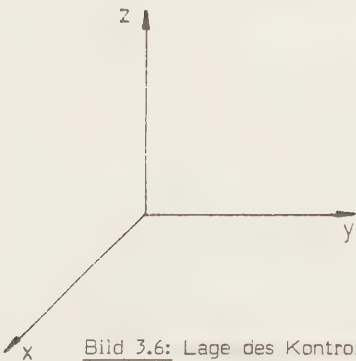
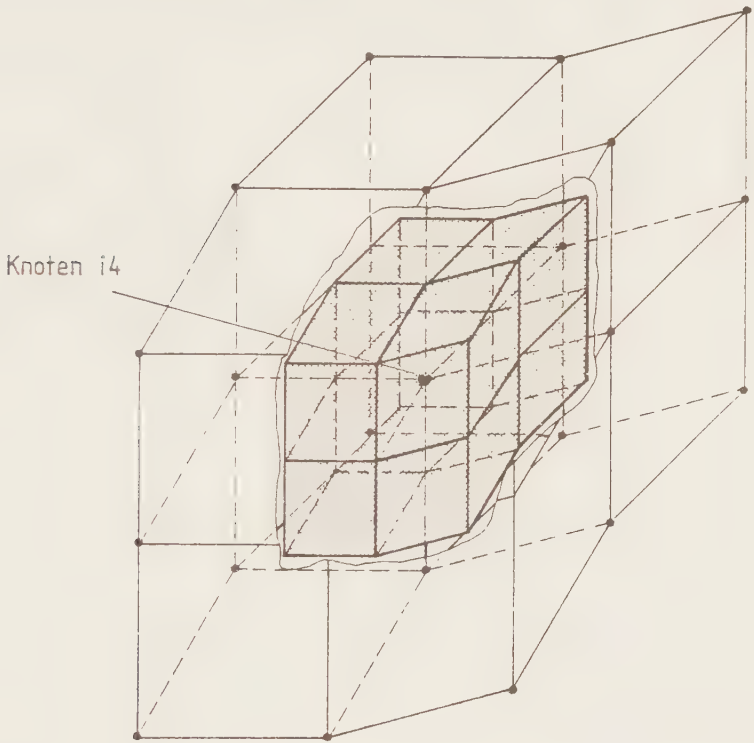


Bild 3.6: Lage des Kontrollvolumens zur Integration der Impulserhaltungsgleichung

haltungsgleichung um einen Knoten i_4 des regulären Maschennetzes. Da ein Knoten i_4 im Inneren des Rechengebietes acht regulären Maschen zugeordnet werden kann, besitzt das als "Impulszelle" bezeichnete Kontrollvolumen insgesamt 24 Oberflächen, von denen sich jeweils drei innerhalb einer regulären Masche befinden. Der Teil der "Impulszelle", der in der regulären Masche (i,j,k) liegt, ist in Bild 3.7 dargestellt.

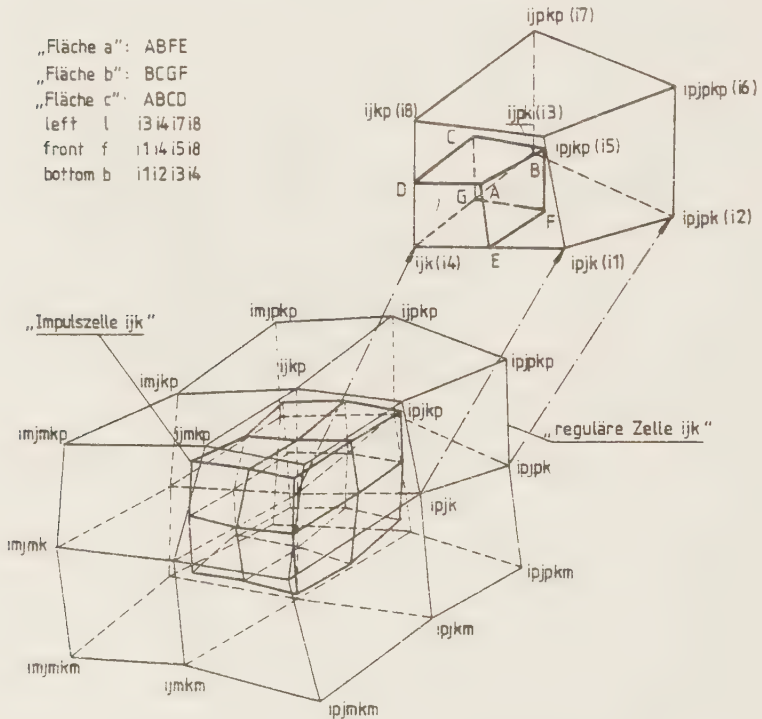


Bild 3.7: Lage des neuen Kontrollvolumens in Beziehung zum regulären Maschennetz

Die Schnittpunkte D, E und G dieser Oberflächen mit den Kanten der regulären Masche sind gerade deren Mittelpunkte. Die Schnittpunktbestimmung der Kanten der "Impulszelle" mit der Oberfläche einer regulären Masche, in Bild 3.7 sind dies z. B. der Punkt A, der Punkt C und der Punkt F, erfolgt dahingehend, daß die Oberfläche in vier flächengleiche Teile aufgeteilt wird. Die Koordinaten des

Punktes B sind implizit durch die Forderung bestimmt, daß der in Bild 3.7 dargestellte Teil des Kontrollvolumens für die Impulsbilanz ein Achtel des Volumens der regulären Masche enthält. Die in diesem Kontrollvolumen enthaltene Masse MV_{ijk} bestimmt sich demnach als arithmetisches Mittel der Massen der acht umliegenden regulären Zellen zu

$$MV_{ijk} = \frac{1}{8} (M_{ijk} + M_{imjk} + M_{ijmk} + M_{imjmk} + M_{ijkm} + M_{imjkm} + M_{ijmkm} + M_{imjmkm}) \quad (3. 10)$$

Die für die Lösung der problembeschreibenden Integralgleichungen (3. 1) und (3. 2) benötigten Normalenvektoren werden wie in Bild 3. 8 dargestellt bestimmt.

Die vier Punkte P_1 , P_2 , P_3 und P_4 bestimmen eine Fläche. Der hierzu gehörende Normalenvektor $\vec{n}$ ist durch seine Komponenten n_x , n_y und n_z in x-, y- bzw. z-Richtung eindeutig beschrieben; es gilt:

$$\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k}$$

wobei die Einheitsvektoren $\vec{i}$, $\vec{j}$ und $\vec{k}$ eine Basis des kartesischen Koordinatensystems darstellen und nicht mit den Indizes (i,j,k) des logischen Raumes verwechselt werden dürfen. Die Koordinaten des Normalenvektors sind durch die Projektionen der Fläche auf die Koordinatenebenen E_1 , E_2 und E_3 gegeben, und es gilt gemäß Bild 3.8 für

$$\begin{aligned} n_x &\hat{=} \text{Inhalt der Fläche } P_1'' P_2'' P_3'' P_4'' \\ n_y &\hat{=} \text{Inhalt der Fläche } P_1''' P_2''' P_3''' P_4''' \\ n_z &\hat{=} \text{Inhalt der Fläche } P_1' P_2' P_3' P_4' \end{aligned}$$

wobei durchaus negative Werte dieser Größen auftreten können.

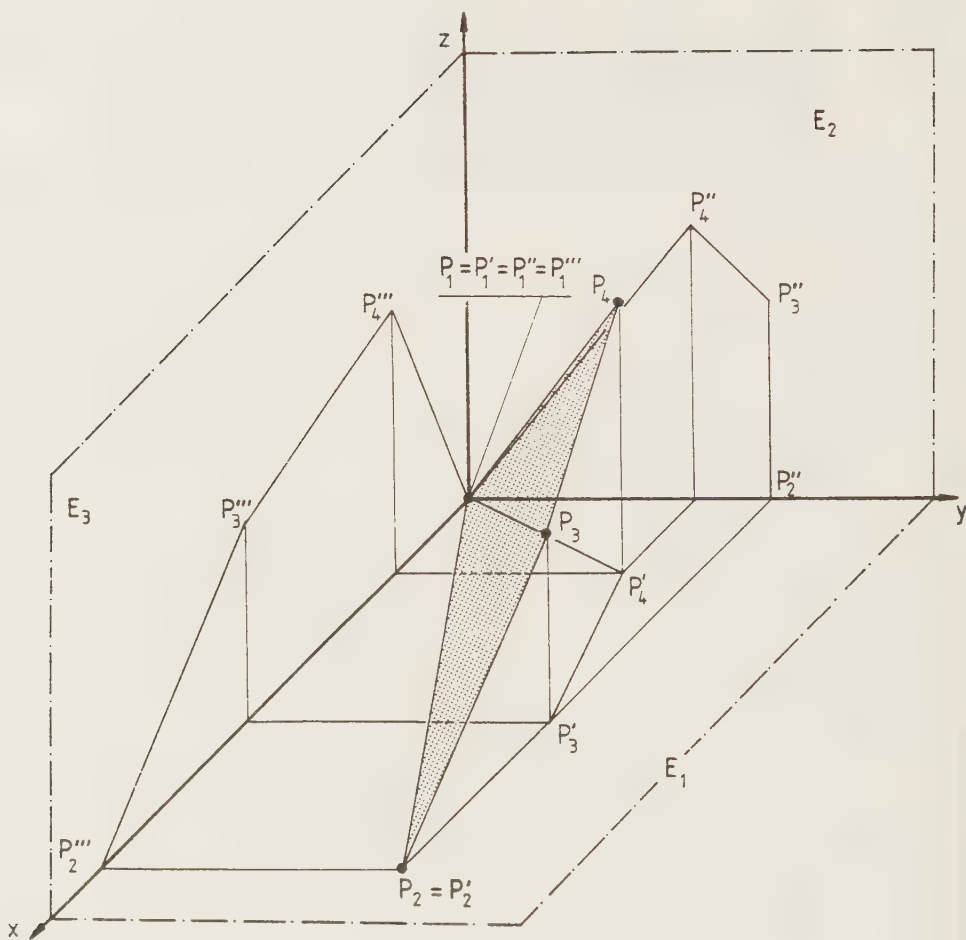


Bild 3.8: Bestimmung des Normalenvektors einer Fläche

Die Projektionsflächen werden zur Berechnung ihres Inhaltes in zwei Dreiecke zerlegt, deren Eckpunkte im mathematisch positiven Sinn durchnummeriert werden. Das in Bild 3.8 dargestellte Viereck mit den Eckpunkten P_1''' , P_2''' , P_3''' und P_4''' wird in die Dreiecke $P_1'''P_2'''P_3'''$ und $P_1'''P_3'''P_4'''$ zerlegt. Der Flächeninhalt beträgt dann:

$$A = \frac{1}{2} [(x_3 - x_2) (z_1 - z_2) - (x_1 - x_2) (z_3 - z_2) \\ + (x_1 - x_4) (z_3 - z_4) - (x_3 - x_4) (z_1 - z_4)]$$

Damit die Flächeninhalte in korrekter Weise bestimmt werden können, ist der einmal gewählte Umlaufsinn bei der Dreieckzerlegung unbedingt einzuhalten.

Da zwei benachbarte Maschen jeweils eine Oberfläche gemeinsam haben, können für jede Masche im Rechengebiet drei voneinander unabhängige Normalenvektoren definiert werden. Hier werden die in Bild 3.9 dargestellten und mit "left", "front" und "bottom" bezeichneten Normalenvektoren gewählt.

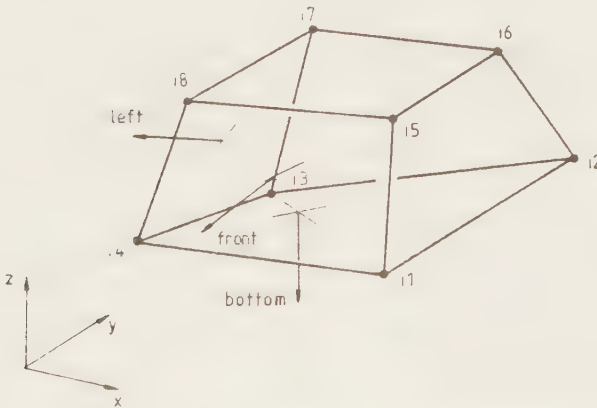


Bild 3.9: Zur Bestimmung der Oberflächennormalenvektoren einer regulären Masche

Die in Bild 3.9 dargestellten Normalenvektoren werden gebildet durch:

$$\vec{n}_1 = \frac{1}{\delta A_1} \{ A_{1x} \cdot \vec{i} + A_{1y} \cdot \vec{j} + A_{1z} \cdot \vec{k} \} \quad (3.11a)$$

$$\vec{n}_f = \frac{1}{\delta A_f} \{ A_{fx} \cdot \vec{i} + A_{fy} \cdot \vec{j} + A_{fz} \cdot \vec{k} \} \quad (3.11b)$$

$$\vec{n}_b = \frac{1}{\delta A_b} \{ A_{bx} \cdot \vec{i} + A_{by} \cdot \vec{j} + A_{bz} \cdot \vec{k} \} \quad (3.11c)$$

Die Inhalte der Projektionsflächen der jeweiligen Oberfläche auf die Koordinatenebenen sind nach [35] durch

$$A_{1x} = -\frac{1}{2} (y_{34}z_{84} - y_{84}z_{34} + y_{87}z_{37} - y_{37}z_{87})$$

$$A_{1y} = +\frac{1}{2} (x_{34}z_{84} - x_{84}z_{34} + x_{87}z_{37} - x_{37}z_{87})$$

$$A_{1z} = -\frac{1}{2} (x_{34}y_{84} - x_{84}y_{34} + x_{87}y_{37} - x_{37}y_{87})$$

$$A_{fx} = +\frac{1}{2} (y_{14}z_{84} - y_{84}z_{14} + y_{85}z_{15} - y_{15}z_{85})$$

$$A_{fy} = -\frac{1}{2} (x_{14}z_{84} - x_{84}z_{14} + x_{85}z_{15} - x_{15}z_{85})$$

$$A_{fz} = +\frac{1}{2} (x_{14}y_{84} - x_{84}y_{14} + x_{85}y_{15} - x_{15}y_{85})$$

$$A_{bx} = +\frac{1}{2} (y_{34}z_{14} - y_{14}z_{34} + y_{12}z_{32} - y_{32}z_{12})$$

$$A_{by} = +\frac{1}{2} (z_{34}x_{14} - z_{14}x_{34} + z_{12}x_{32} - z_{32}x_{12})$$

$$A_{bz} = -\frac{1}{2} (y_{34}x_{14} - y_{14}x_{34} + y_{12}x_{32} - y_{32}x_{12})$$

gegeben, wobei z. B. $x_{12} = x_{11} - x_{12}$ ist. Die im Nenner der Gleichung (3. 11) stehenden Größen δA_l , δA_f , δA_b sind Maßzahlen für den Inhalt der jeweiligen Oberfläche und werden durch

$$\delta A_l = \sqrt{A_{lx}^2 + A_{ly}^2 + A_{lz}^2}$$

$$\delta A_f = \sqrt{A_{fx}^2 + A_{fy}^2 + A_{fz}^2}$$

$$\delta A_b = \sqrt{A_{bx}^2 + A_{by}^2 + A_{bz}^2}$$

berechnet. Die Größe A_{lx} stellt den Inhalt der Projektionsfläche der mit "left" bezeichneten Oberfläche einer regulären Zelle auf eine Koordinatenfläche senkrecht zur x-Achse dar.

Für den weiteren Verlauf des Diskretisierungsprozesses müssen folgende Annahmen getroffen werden:

- die einem Knoten einer regulären Masche zugeordneten Geschwindigkeitskomponenten u, v und w des Geschwindigkeitsvektors variieren entlang ihrer Kanten linear (Bild 3.10);
- der im Zentrum einer regulären Zelle angenommene Druck p ist innerhalb dieser Zelle konstant;
- bei der Berechnung von Volumen- und Oberflächenintegralen der Gleichungen (3. 1) und (3. 2) wird angenommen, daß die Integranden innerhalb des Integrationsgebietes konstant sind.

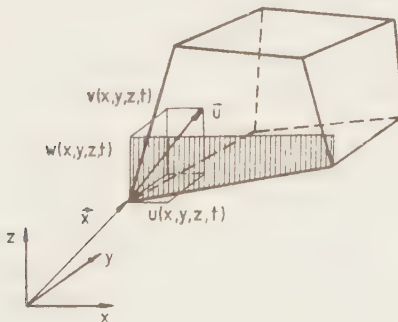


Bild 3.10: Lineare Variation der Geschwindigkeitskomponenten entlang der Kanten einer regulären Zelle

Wegen der zuletzt genannten Annahme können die Oberflächenintegrale des Impulserhaltungssatzes in solche über die Berandungsflächen einer regulären Zelle überführt werden. Nach dem Satz von Gauß gilt für das Oberflächenintegral über eine geschlossene Fläche

$$\int_A \vec{n} \, dA = 0$$

woraus sich für das in Bild 3.7 dargestellte, in der regulären Masche enthaltene (Teil-) Kontrollvolumen nach Amsden [35] die Beziehung

$$\vec{n}'_a \delta A'_a + \vec{n}'_b \delta A'_b + \vec{n}'_c \delta A'_c = -\frac{1}{4} (\vec{n}'_1 \delta A_1 + \vec{n}'_f \delta A_f + \vec{n}'_b \delta A_b) \quad (3.12)$$

ergibt. Die Größen $\vec{n}'_a$, $\vec{n}'_b$ und $\vec{n}'_c$ sind die nach außen weisenden Normalenvektoren der in der regulären Zelle (ijk) liegenden drei Oberflächen des Kontrollvolumens für die Impulserhaltungsgleichung. $\delta A'_a$, $\delta A'_b$ und $\delta A'_c$ repräsentieren die Flächeninhalte dieser Oberflächen.

3.2.2 Die Approximation der zeitlichen Ableitungen

Wegen des parabolischen Charakters der instationären Navier-Stokes-Gleichungen sind im gesamten Lösungsgebiet Anfangswerte vorzugeben. Mit Ausnahme der Berandungsflächen, auf denen Randwerte anzugeben sind, werden als Startwerte die unbekannten Größen zu Null gesetzt. Nun werden die Differenzengleichungen in einer Folge von Zeitschritten gelöst, wobei in jedem Zeitintervall δt die Lösung verbessert wird. Jeder dieser Zeitschritte δt setzt sich aus drei genau definierten Teilschritten, auch Phasen genannt, zusammen [20, 35, 36].

- Phase 1:

In diesem ersten Teilschritt wird die Impulserhaltungsgleichung für ein mit der Strömung mitbewegtes Kontrollvolumen gelöst. Durch diese Betrachtungsweise verschwinden die Terme $(\vec{u} - \vec{U})$ in Gleichung (3.2), und es ergibt sich eine lineare Beziehung, die den Einfluß von Druck-, volumenhaft verteilt angreifenden

Körper- und viskosen Reibungskräften auf das Geschwindigkeitsfeld beschreibt. Die entstandenen Gleichungen werden in expliziter Weise gelöst, d. h. Größen des Zeitschrittes (n+1) sind nur von schon berechneten bzw. vorgegebenen Variablen abhängig.

- Phase 2:

Der zweite Rechenschritt enthält eine implizite Betrachtung von Kontinuitäts- und Impulserhaltungsgleichung. Gekoppelt durch eine vereinfachte Impuls- und der Kontinuitätsgleichung werden das Druck- und das Geschwindigkeitsfeld iterativ solange verbessert, bis die "Inkompressibilitätsbedingung"

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0$$

im gesamten Lösungsgebiet erfüllt ist.

- Phase 3:

Im abschließenden Teil des Lösungsalgorithmus wird das bisher mithewegte Kontrollvolumen wieder auf die ursprünglichen Koordinatenpunkte zurückgezogen, um zu einer Euler'schen Betrachtungsweise zu gelangen. Hierdurch entstehen konvektive Austauschvorgänge von Impuls, deren Auswirkungen auf das Geschwindigkeitsfeld in diesem Abschnitt der Rechnung Berücksichtigung finden.

Die sich nach den drei Phasen einstellenden Druck- und Geschwindigkeitsfelder dienen als Ausgangswert für einen sich gegebenenfalls anschließenden neuerlichen Durchlauf des Lösungsalgorithmus; diese Prozedur wird solange fortgesetzt, bis eine bestimmte Zeit t erreicht oder ein Kriterium für eine stationäre Lösung erfüllt wird. Im letzten Fall kann beispielsweise gefordert werden, daß sich die Änderungen der berechneten Größen von Zeitschritt zu Zeitschritt unterhalb einer gewissen Schranke bewegen müssen.

Der oben beschriebene Algorithmus ist in Bild 3.11 schematisch dargestellt.

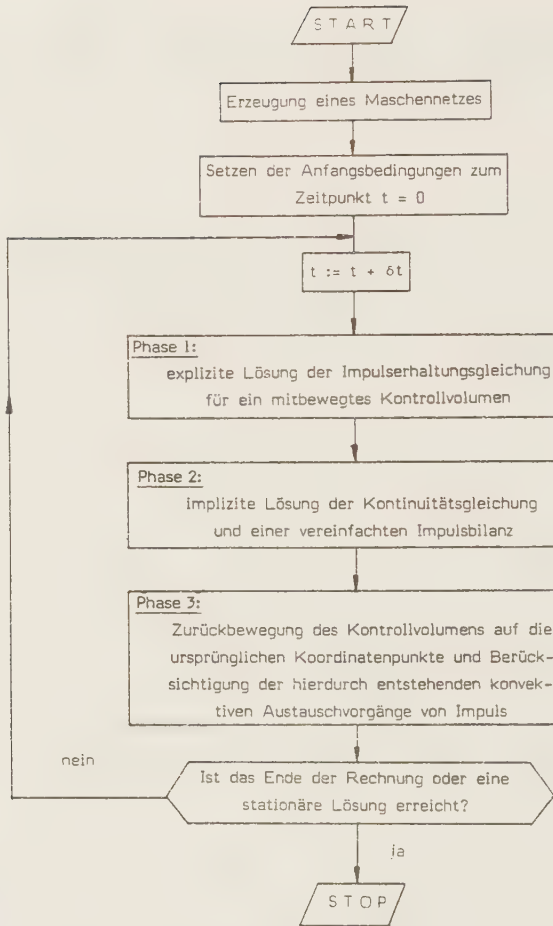


Bild 3.11: Schematische Darstellung des dreiphasigen ALE-Verfahrens

Im folgenden werden diese einzelnen Phasen detailliert dargestellt. Bei der Diskretisierung der Kontinuitäts- und der Bewegungsgleichung werden in den einzelnen Phasen unterschiedliche Kontrollvolumina benutzt. In Bild 3.12 sind die aktuell verwendeten Kontrollvolumina jeweils dick eingezeichnet, während die gerade nicht benötigten Zellen strichpunktiert dargestellt wurden.

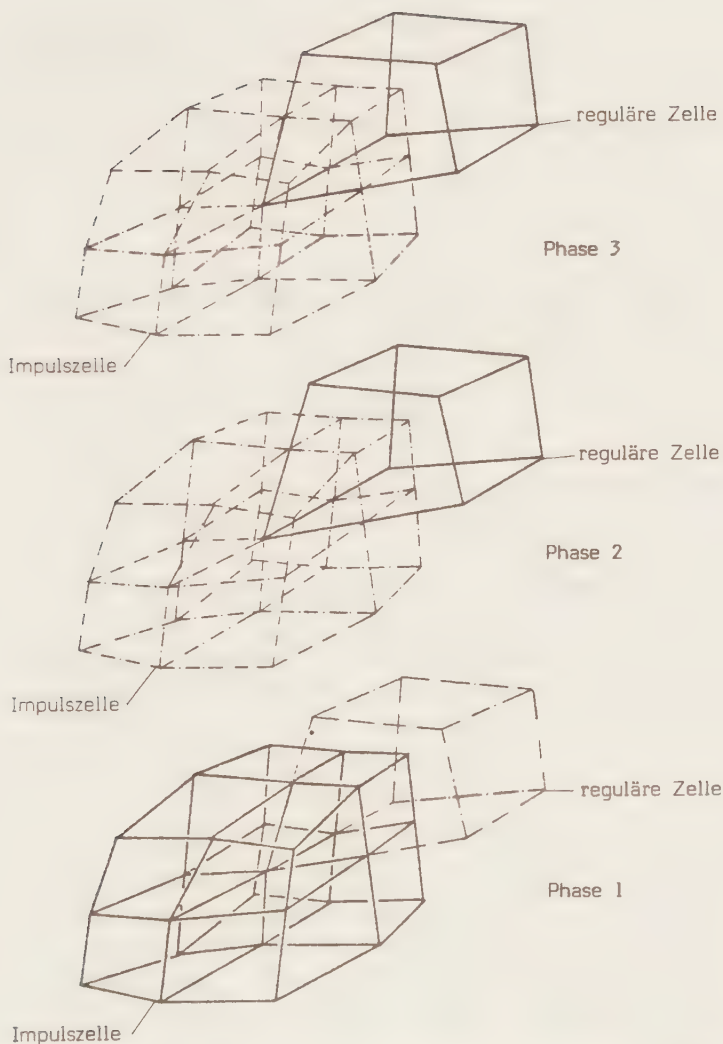


Bild 3.12: Verwendung der Kontrollvolumina während des drei Phasen umfassenden Zeitschrittes

In Phase 1 wird das um den Knoten i4 einer regulären Zelle zentrierte Kontrollvolumen bei der Diskretisierung der Impulserhaltungsgleichung

verwendet. Dagegen werden sowohl in Phase 2 als auch in Phase 3 die dann geltenden Gleichungen über eine reguläre Zelle integriert.

Das Zeitintervall δt zwischen zwei zeitlich aufeinanderfolgenden Lösungen ist durch

$$\delta t = t^{n+1} - t^n$$

gegeben. Die Differenzenapproximation eines zeitlichen Differentialquotienten $\frac{\partial Q}{\partial t}$ ist der Ausdruck

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{Q^{n+1} - Q^n}{\delta t}$$

der von erster Ordnung genau ist. Der hochgestellte Index, z. B. n bzw. $(n+1)$ kennzeichnet die gerade betrachtete Zeitebene.

3.2.3 Die räumliche Diskretisierung der einzelnen Phasen

Oberflächenintegrale werden in eine Summe über alle Oberflächen des betrachteten Kontrollvolumens überführt und auf diese Weise approximiert; es gilt

$$\int_A \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} \cdot \vec{n}_{\alpha} \, \delta A_{\alpha} \quad (3.13)$$

wobei $\vec{F}$ eine vektorielle Größe, $\vec{n}_{\alpha}$ ein zu der Oberfläche " α " gehörender Normalenvektor und δA_{α} der Flächeninhalt der Fläche " α " ist. $\vec{F}_{\alpha}$ kennzeichnet den Wert der vektoriellen Größe auf der jeweiligen Oberfläche, der gegebenenfalls durch Mittelwertbildungen berechnet wird. Eine analoge Beziehung gilt auch für eine skalare Größe.

In Bild 3.13 ist zur Verdeutlichung der im folgenden benutzten Indizes ein Ausschnitt des Maschennetzes zu sehen. Dargestellt sind die acht regulären Zellen, die das als "Impulszone ijk " bezeichnete Integrationsgebiet für gewisse Teile der Impulserhaltungsgleichung umgeben.

Aus Gründen der übersichtlichen Darstellung werden in den nachfolgenden Abschnitten die Differenzengleichungen teilweise abkürzend wiedergegeben. Die vollständigen Differenzengleichungen finden sich im Anhang A1.

3.2.3.1 Die Phase I

Wie in Bild 3.12 dargestellt ist, wird für die Berücksichtigung der Auswirkungen von Druckgradient, Spannungstensor und volumenhaft verteilt angreifenden Kräften, z. B. der Schwerkraft, auf das Geschwindigkeitsfeld, die um den Knoten ijk zentrierte Impulszelle ijk benutzt.

Für ein mitbewegtes Kontrollvolumen gilt nach Gleichung (3. 2):

$$\frac{d}{dt} \int_{V'} \rho \vec{u} dV' + \int_{A'} \vec{n}' \cdot \underline{p} \cdot \underline{I} dA' - \int_{A'} [\vec{n}' \cdot \underline{g}] dA' = \int_{V'} \rho \vec{g} dV' \quad (3. 14)$$

Die Hochindizes ' bezeichnen das Volumen bzw. die Oberfläche des Integrationsgebietes (Impulszelle ijk). Im folgenden werden die einzelnen Terme dieser Gleichung betrachtet und die entsprechenden Differenzenausdrücke abgeleitet. Die sich nach der Phase I einstellende Geschwindigkeit wird mit dem Hochindex ** gekennzeichnet.

Für die Approximation der zeitlichen Änderung der Impulsdichte ($\rho \vec{u}$) gilt:

$$\frac{d}{dt} \int_{V'} \rho \vec{u} dV' = \frac{\rho V'_{ijk} (u_{ijk}^{**} - u_{ijk}^n)}{\delta t} \quad (3. 15)$$

Der Term $(\rho V'_{ijk})$ wird zur Masse MV_{ijk} zusammengefaßt, die gemäß Gleichung (3. 10) als arithmetisches Mittel der acht umliegenden

regulären Zellen gegeben ist.

Die Diskretisierung der restlichen Integralausdrücke in Gleichung (3. 14) gestaltet sich weitaus aufwendiger. Für den Druck p wird vorausgesetzt, daß er innerhalb einer regulären Zelle konstant ist, wobei z. B. der in der regulären Zelle ijk herrschende Druck durch p_{ijk} dargestellt wird. In jeder der acht eine Impulszelle umgebenden Maschen herrscht demnach ein unterschiedlicher Druck. Allerdings werden jeweils drei der insgesamt vierundzwanzig Oberflächen von demselben Druck beaufschlagt. Da der Druck eine skalare Größe ist, kann das in Gleichung (3. 14) auftretende Skalarprodukt $[\vec{n}' \cdot \underline{p}]$ nach den Regeln der Tensorrechnung durch

$$[\vec{n}' \cdot \underline{p}] = p \cdot [\vec{n}' \cdot \underline{1}] = p \vec{n}'$$

ausgedrückt werden. Wird das Integral

$$\int_{A'} p \vec{n}' dA'$$

gemäß Gleichung (3. 13) durch eine endliche Summe approximiert, so erhält man

$$\int_{A'} p \vec{n}' dA' = \sum_{\alpha=1}^{24} p_{\alpha} \vec{n}'_{\alpha} \delta A'_{\alpha}$$

Mit den Bezeichnungen nach Bild 3.13 ergibt sich für diese Summe

$$\begin{aligned} \int_{A'} p \vec{n}' dA' &= \sum_{\alpha=1}^{24} p_{\alpha} \vec{n}'_{\alpha} \delta A'_{\alpha} \\ &= p_{ijk} [\vec{n}'_1 \cdot \delta A'_1 + \vec{n}'_2 \cdot \delta A'_2 + \vec{n}'_3 \cdot \delta A'_3] \\ &+ p_{imjk} [\vec{n}'_4 \cdot \delta A'_4 + \vec{n}'_5 \cdot \delta A'_5 + \vec{n}'_6 \cdot \delta A'_6] \\ &+ p_{imjmk} [\vec{n}'_7 \cdot \delta A'_7 + \vec{n}'_8 \cdot \delta A'_8 + \vec{n}'_9 \cdot \delta A'_9] \\ &+ p_{ijmk} [\vec{n}'_{10} \cdot \delta A'_{10} + \vec{n}'_{11} \cdot \delta A'_{11} + \vec{n}'_{12} \cdot \delta A'_{12}] \\ &+ p_{ijkm} [\vec{n}'_{13} \cdot \delta A'_{13} + \vec{n}'_{14} \cdot \delta A'_{14} + \vec{n}'_{15} \cdot \delta A'_{15}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ p_{imjkm} \left[\vec{n}'_{16} \cdot \delta A'_{16} + \vec{n}'_{17} \cdot \delta A'_{17} + \vec{n}'_{18} \cdot \delta A'_{18} \right] \\
 &+ p_{imjkm} \left[\vec{n}'_{19} \cdot \delta A'_{19} + \vec{n}'_{20} \cdot \delta A'_{20} + \vec{n}'_{21} \cdot \delta A'_{21} \right] \\
 &+ p_{ijmkm} \left[\vec{n}'_{22} \cdot \delta A'_{22} + \vec{n}'_{23} \cdot \delta A'_{23} + \vec{n}'_{24} \cdot \delta A'_{24} \right] \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

Die in den Klammern stehenden Produktsummen sind nicht direkt berechenbar, da den Eckpunkten der Impulszelle ijk keine Koordinaten zugewiesen worden sind. Nach Gleichung (3.12) sind aber diese Terme durch bekannte geometrische Größen einer regulären Zelle ausdrückbar, womit sich für das Oberflächenintegral

$$\int_{A'} p \vec{n}' dA'$$

folgende Approximationsformel ergibt:

$$\begin{aligned}
 \int_{A'} p \vec{n}' dA' = & -\frac{1}{4} \{ p_{ijk} \left[\vec{n}_1 \cdot \delta A_1 + \vec{n}_f \cdot \delta A_f + \vec{n}_b \cdot \delta A_b \right] |_{ijk} \\
 & + p_{imjkm} \left[\vec{n}_f \cdot \delta A_f + \vec{n}_r \cdot \delta A_r + \vec{n}_b \cdot \delta A_b \right] |_{imjkm} \\
 & + p_{imjkm} \left[\vec{n}_d \cdot \delta A_d + \vec{n}_r \cdot \delta A_r + \vec{n}_b \cdot \delta A_b \right] |_{imjkm} \\
 & + p_{ijmkm} \left[\vec{n}_1 \cdot \delta A_1 + \vec{n}_d \cdot \delta A_d + \vec{n}_b \cdot \delta A_b \right] |_{ijmkm} \\
 & + p_{ijkkm} \left[\vec{n}_1 \cdot \delta A_1 + \vec{n}_f \cdot \delta A_f + \vec{n}_t \cdot \delta A_t \right] |_{ijkkm} \\
 & + p_{imjkm} \left[\vec{n}_f \cdot \delta A_f + \vec{n}_r \cdot \delta A_r + \vec{n}_t \cdot \delta A_t \right] |_{imjkm} \\
 & + p_{imjkm} \left[\vec{n}_d \cdot \delta A_d + \vec{n}_r \cdot \delta A_r + \vec{n}_t \cdot \delta A_t \right] |_{imjkm} \\
 & + p_{ijmkm} \left[\vec{n}_1 \cdot \delta A_1 + \vec{n}_d \cdot \delta A_d + \vec{n}_t \cdot \delta A_t \right] |_{ijmkm} \} \\
 & (3.17)
 \end{aligned}$$

Wird weiterhin ausgenutzt, daß für jede reguläre Zelle nur drei Normalenvektoren benötigt werden, da eine jede Oberfläche zu zwei benachbarten Maschen gehört, kann Gleichung (3. 17) unter Verwendung der nachstehenden Tabelle umgeschrieben werden:

$$\vec{n}_r \cdot \delta A_r|_{imjk} = - \vec{n}_l \cdot \delta A_l|_{ijk}$$

$$\vec{n}_d \cdot \delta A_d|_{imjmk} = - \vec{n}_f \cdot \delta A_f|_{imjk}$$

$$\vec{n}_r \cdot \delta A_r|_{imjmk} = - \vec{n}_l \cdot \delta A_l|_{ijmk}$$

$$\vec{n}_d \cdot \delta A_d|_{ijmk} = - \vec{n}_f \cdot \delta A_f|_{ijk}$$

$$\vec{n}_t \cdot \delta A_t|_{ijkm} = - \vec{n}_b \cdot \delta A_b|_{ijk}$$

$$\vec{n}_r \cdot \delta A_r|_{imjkm} = - \vec{n}_l \cdot \delta A_l|_{ijkm}$$

$$\vec{n}_t \cdot \delta A_t|_{imjkm} = - \vec{n}_b \cdot \delta A_b|_{imjk}$$

$$\vec{n}_d \cdot \delta A_d|_{imjkm} = - \vec{n}_f \cdot \delta A_f|_{imjkm}$$

$$\vec{n}_r \cdot \delta A_r|_{imjkm} = - \vec{n}_l \cdot \delta A_l|_{ijkm}$$

$$\vec{n}_t \cdot \delta A_t|_{imjkm} = - \vec{n}_b \cdot \delta A_b|_{imjkm}$$

$$\vec{n}_d \cdot \delta A_d|_{ijkm} = - \vec{n}_f \cdot \delta A_f|_{ijkm}$$

$$\vec{n}_t \cdot \delta A_t|_{ijkm} = - \vec{n}_b \cdot \delta A_b|_{ijkm}$$

Tabelle 3.1: Beziehungen zwischen Normalenvektoren

Gleichzeitig wird das Integral

$$\int_{A'} p \vec{n}' dA'$$

skalar mit dem Basisvektor $\vec{i}$ multipliziert, womit man für die Komponente der Vektorgleichung in x-Richtung erhält:

$$\begin{aligned} \vec{i} \cdot \int_{A'} p \vec{n}' dA' = \\ - \frac{1}{4} \{ p_{ijk} [+A_{lx}|_{ijk} + A_{fx}|_{ijk} + A_{bx}|_{ijk}] \\ + p_{imjk} [-A_{lx}|_{ijk} + A_{fx}|_{imjk} + A_{bx}|_{imjk}] \\ + p_{imjmk} [-A_{fx}|_{ijmk} - A_{fx}|_{imjk} + A_{bx}|_{imjmk}] \\ + p_{ijmk} [+A_{lx}|_{ijmk} - A_{fx}|_{ijk} + A_{bx}|_{ijmk}] \\ + p_{ijkm} [+A_{lx}|_{ijkm} + A_{fx}|_{ijkm} - A_{bx}|_{ijk}] \\ + p_{imjkm} [-A_{lx}|_{ijkm} + A_{fx}|_{imjkm} - A_{bx}|_{imjk}] \\ + p_{imjmk} [-A_{lx}|_{ijmk} - A_{fx}|_{imjkm} - A_{bx}|_{imjmk}] \\ + p_{ijmkm} [+A_{lx}|_{ijmkm} - A_{fx}|_{ijkm} - A_{bx}|_{ijmk}] \} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Gleichung (3.18) beschreibt die Änderung der Komponente des Geschwindigkeitsvektors in x-Richtung, hervorgerufen durch den auf das Kontrollvolumen wirkenden Druckgradienten für den Knoten ijk .

Für die numerische Bearbeitung dieser Gleichung ist es vorteilhaft, die sogenannte "zellorientierte Betrachtungsweise" zu wählen. Hierbei werden das Lösungsgebiet Zelle für Zelle durchlaufen und die Auswirkungen des in der Zelle herrschenden Drucks auf die acht Knoten der jeweiligen Zelle berechnet. Da jeder Knoten des Lösungsgebietes bei diesem Vorgehen achtmal angesprochen wird, ergibt sich schließlich durch Aufsummation die durch Gleichung (3.18) beschriebene Auswirkung des Druckgradienten; unter Verwendung der Beziehung (3.15) und der Gleichung (3.18) erhält man für die reguläre Zelle ijk :

$$u_{ipjk}^* = \frac{1}{4} \frac{\delta t \cdot p_{ijk}}{MV_{ipjk}} [- A_{lx}|_{ipjk} + A_{fx}|_{ijk} + A_{bx}|_{ijk}] + u_{ipjk}^n$$

$$u_{ipjpk}^* = \frac{1}{4} \frac{\delta t \cdot p_{ijk}}{MV_{ipjpk}} [- A_{lx}|_{ipjk} - A_{fx}|_{ijpk} + A_{bx}|_{ijk}] + u_{ipjpk}^n$$

$$u_{ijpk}^* = \frac{1}{4} \frac{\delta t \cdot p_{ijk}}{MV_{ijpk}} [+ A_{lx}|_{ijk} - A_{fx}|_{ijpk} + A_{bx}|_{ijk}] + u_{ijpk}^n$$

$$u_{ijk}^* = \frac{1}{4} \frac{\delta t \cdot p_{ijk}}{MV_{ijk}} [+ A_{lx}|_{ijk} + A_{fx}|_{ijk} + A_{bx}|_{ijk}] + u_{ijk}^n$$

$$u_{ipjpkp}^* = \frac{1}{4} \frac{\delta t \cdot p_{ijk}}{MV_{ipjpkp}} [- A_{lx}|_{ipjk} + A_{fx}|_{ijk} - A_{bx}|_{ijkp}] + u_{ipjpkp}^n$$

$$u_{ipjpkp}^* = \frac{1}{4} \frac{\delta t \cdot p_{ijk}}{MV_{ipjpkp}} [- A_{lx}|_{ipjk} - A_{fx}|_{ijpk} - A_{bx}|_{ijkp}] + u_{ipjpkp}^n$$

$$u_{ijpkp}^* = \frac{1}{4} \frac{\delta t \cdot p_{ijk}}{MV_{ijpkp}} [+ A_{lx}|_{ijk} - A_{fx}|_{ijpk} - A_{bx}|_{ijkp}] + u_{ijpkp}^n$$

$$u_{ijkp}^* = \frac{1}{4} \frac{\delta t \cdot p_{ijk}}{MV_{ijkp}} [+ A_{lx}|_{ijk} + A_{fx}|_{ijk} - A_{bx}|_{ijkp}] + u_{ijkp}^n$$

Die Auswirkungen innerhalb des Kontrollvolumens aufgrund diffusiver Transportvorgänge werden durch das Oberflächenintegral

$$\int_{\Delta A'} [\vec{n}' \cdot \underline{\underline{g}}] dA'$$

beschrieben. Nach Gleichung (3. 13) approximiert man dieses Oberflächenintegral durch die endliche Summe

$$\int_{\Delta A'} [\vec{n}' \cdot \underline{\underline{g}}] dA' = \sum_{\alpha=1}^{\Delta A} [\vec{n}'_{\alpha} \cdot \underline{\underline{g}}] \delta A'_{\alpha} \quad (3. 20)$$

wobei die Komponenten des Spannungstensors innerhalb einer regulären Masche als konstant angenommen werden. Nach den Regeln der Tensorrechnung ergibt sich für das Skalarprodukt $[\vec{n}' \cdot \underline{\underline{g}}]$ für kartesische Koordinaten:

$$\begin{aligned} [\vec{n}' \cdot \underline{\underline{g}}] &= \sum_{i=1}^3 \delta_{ij} \cdot \sum_{k=1}^3 \sigma_{ijk} \cdot n'_j \\ &= \vec{i} : \{ \sigma_{xx} \cdot n'_x + \sigma_{xy} \cdot n'_y + \sigma_{xz} \cdot n'_z \} \\ &\quad + \vec{j} : \{ \sigma_{yx} \cdot n'_x + \sigma_{yy} \cdot n'_y + \sigma_{yz} \cdot n'_z \} \\ &\quad + \vec{k} : \{ \sigma_{zx} \cdot n'_x + \sigma_{zy} \cdot n'_y + \sigma_{zz} \cdot n'_z \} \end{aligned}$$

Durch Übergehen zu einer zellorientierten Betrachtungsweise und Ersetzen der unbekannten Normalenvektoren und Flächeninhalte durch bekannte geometrische Größen, erhält man für die Änderung der Komponente des Geschwindigkeitsvektors in x-Richtung, z. B. für den Knoten mit dem Index ipjk :

$$\begin{aligned}
 u_{ipjk}^{**} &= u_{ipjk}^{*} \\
 &- \frac{1}{4} \frac{\delta t}{MV_{ipjk}} \cdot \{ \sigma_{xx}|_{ijk} \cdot [-A_{lx}|_{ipjk} + A_{fx}|_{ijk} + A_{bx}|_{ijk}] \\
 &\quad + \sigma_{xy}|_{ijk} \cdot [-A_{ly}|_{ipjk} + A_{fy}|_{ijk} + A_{by}|_{ijk}] \\
 &\quad + \sigma_{xz}|_{ijk} \cdot [-A_{lz}|_{ipjk} + A_{fz}|_{ijk} + A_{bz}|_{ijk}] \} \\
 &\quad (3.21)
 \end{aligned}$$

Die vollständigen Differenzengleichungen sind in Anhang A1 angegeben.

Die Komponenten des Spannungstensors

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

sind für ein Newton'sches Fluid proportional den Geschwindigkeitsgradienten. Beispielhaft wird an dieser Stelle die Größe

$$\sigma_{xy} = 2 \mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

bestimmt. Die partielle Ableitung $\frac{\partial u}{\partial x}$ kann durch die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \vec{\nabla} \cdot (u \vec{i})$$

ersetzt werden. Integriert man über eine reguläre Zelle, so ergibt sich:

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial x} dV = \int_V \vec{\nabla} \cdot (u \vec{i}) dV = \int_A u \vec{i} \cdot \vec{n} dA$$

Für die linke Seite dieser Gleichung gilt:

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial x} dV = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{ijk} \cdot V_{ijk}$$

während für das Oberflächenintegral der rechten Seite die Näherungsformel

$$\begin{aligned} \int u \vec{i} \cdot \vec{n} dA &= \sum_{\alpha=1}^6 (u)_{\alpha} \vec{i} \cdot \vec{n}_{\alpha} \delta A_{\alpha} \\ &= u_1 \cdot A_{1x} + u_f \cdot A_{fx} + u_b \cdot A_{bx} + u_r \cdot A_{rx} + u_d \cdot A_{dx} + u_t \cdot A_{tx} \end{aligned}$$

abgeleitet werden kann.

Für die Größen u_1 , u_f , u_b , u_r , u_d und u_t werden die arithmetischen Mittel der Geschwindigkeitskomponenten u eingesetzt:

$$u_1 = \frac{1}{4} u_{3478} = \frac{1}{4} [u^n(i3) + u^n(i4) + u^n(i7) + u^n(i8)]$$

$$u_r = \frac{1}{4} u_{1256} = \frac{1}{4} [u^n(i1) + u^n(i2) + u^n(i5) + u^n(i6)]$$

$$u_f = \frac{1}{4} u_{1458} = \frac{1}{4} [u^n(i1) + u^n(i4) + u^n(i5) + u^n(i8)]$$

$$u_d = \frac{1}{4} u_{2367} = \frac{1}{4} [u^n(i2) + u^n(i3) + u^n(i6) + u^n(i7)]$$

$$u_b = \frac{1}{4} u_{1234} = \frac{1}{4} [u^n(i1) + u^n(i2) + u^n(i3) + u^n(i4)]$$

$$u_t = \frac{1}{4} u_{5678} = \frac{1}{4} [u^n(i5) + u^n(i6) + u^n(i7) + u^n(i8)]$$

Die Diskretisierung des noch ausstehenden Volumenintegrals

$$\int_{V'} \vec{g} \cdot \rho \, dV'$$

bereitet keinerlei Schwierigkeiten. Da die Dichte und der Einfluß des Schwerfeldes konstant sind, gilt:

$$\int_{V'} \vec{g} \cdot \rho \, dV' = (\vec{g} \cdot \rho)_{ijk} \cdot V_{ijk}$$

Nachdem die Geschwindigkeiten in der Phase 1 an das aktuelle Druckfeld, den herrschenden Zähigkeitskräften und gegebenenfalls den einwirkenden Volumenkräften angepaßt wurden, schließt sich Phase 2 an.

3.2.3.2 Die Phase 2

Die Phase 2 des Lösungsalgorithmus beinhaltet eine iterative Lösung der Kontinuitäts- und einer vereinfachten Impulserhaltungsgleichung. Ziel dieses Rechenschrittes ist eine simultane Anpassung des Druck- und Geschwindigkeitsfeldes in der Art, daß sie Kontinuitäts- und Impulsgleichung erfüllen. Da das Kontrollvolumen in dieser Phase noch mit der Fluidströmung mitbewegt wird, muß die Kontinuitätsgleichung in der Lagrange'schen Form berücksichtigt werden; sie lautet:

$$\frac{d}{dt} (\rho J) = 0 \quad (3.22)$$

wobei der Term J die Änderung des Rauminhaltes des Kontrollvolumens bei der Bewegung längs einer Teilchenbahn beschreibt [37]. Gemäß der Produktregel der Differentialrechnung ergibt sich:

$$J \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{dJ}{dt} = 0$$

Für ein inkompressibles Fluid ist der erste Term identisch Null,

während für den zweiten Term nach Serrin [37] geschrieben werden kann:

$$\rho \frac{dJ}{dt} = \rho J \vec{\nabla} \cdot \vec{U}$$

Zusammen mit Gleichung (3. 22) ergibt sich dann:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad (3. 23)$$

Es ist bekannt, daß nach Definition der Geschwindigkeitskomponenten in den Knoten und des Druckes im Mittelpunkt einer regulären Zelle im Druckfeld starke Entkopplungserscheinungen auftreten können [2, 30, 32, 38]. Diese Schwierigkeit taucht bei den sogenannten vollständig versetzten Gittern, bei denen die Geschwindigkeitskomponenten auf den Seitenflächen der Kontrollvolumina definiert sind, prinzipiell nicht auf [30]. In einem konturangepaßten Maschennetz ist es jedoch sehr schwierig, diese Art der Stützstellenanordnung zu realisieren, weshalb hier ein anderes Vorgehen gewählt wird. Bei der impliziten Lösung der Kontinuitäts- und Impulsgleichung werden sogenannte "flächenzentrierte Geschwindigkeiten" in die Rechnung eingebracht, deren Berechnung für jeden Zeitschritt aus den in den Knoten definierten Geschwindigkeitskomponenten und den Flächennormalenvektoren neu erfolgt. Für eine reguläre Zelle ergeben sich die flächenzentrierten Geschwindigkeiten durch Bilden des Skalarproduktes $(\vec{U} \cdot \vec{n})$ für jede Oberfläche zu:

$$(\vec{U} \cdot \vec{n})_{\alpha} = \frac{1}{4} (\vec{u}_a + \vec{u}_b + \vec{u}_c + \vec{u}_d) \cdot \vec{n}_{\alpha}$$

wobei die Indizes a, b, c, d die vier die Fläche α bildenden Knoten einer regulären Zelle bezeichnen und $\vec{n}_{\alpha}$ der zugehörige Normalenvektor ist. Die sechs einer Masche zugeordneten flächenzentrierten Geschwindigkeiten ergeben sich hiermit zu:

$$c_l = \frac{1}{4 \cdot 6 A_l} \cdot [u_{3478} \cdot A_{1x}(i4) + v_{3478} \cdot A_{1y}(i4) + w_{3478} \cdot A_{1z}(i4)]$$

$$c_r = \frac{1}{4 \cdot 6 A_r} \cdot [u_{1256} \cdot A_{1x}(i1) + v_{1256} \cdot A_{1y}(i1) + w_{1256} \cdot A_{1z}(i1)]$$

$$\begin{aligned}
 c_f &= \frac{1}{4 \cdot \delta A_f} \cdot [u_{1458} \cdot A_{fx}(i4) + v_{1458} \cdot A_{fy}(i4) + w_{1458} \cdot A_{fz}(i4)] \\
 c_d &= \frac{1}{4 \cdot \delta A_d} \cdot [u_{2367} \cdot A_{dx}(i3) + v_{2367} \cdot A_{dy}(i3) + w_{2367} \cdot A_{dz}(i3)] \\
 c_b &= \frac{1}{4 \cdot \delta A_b} \cdot [u_{1234} \cdot A_{bx}(i4) + v_{1234} \cdot A_{by}(i4) + w_{1234} \cdot A_{bz}(i4)] \\
 c_t &= \frac{1}{4 \cdot \delta A_t} \cdot [u_{5678} \cdot A_{tx}(i8) + v_{5678} \cdot A_{ty}(i8) + w_{5678} \cdot A_{tz}(i8)]
 \end{aligned}
 \tag{3.24}$$

wobei z. B. $u_{3478} = u_{i3}^n + u_{i4}^n + u_{i7}^n + u_{i8}^n$ ist.

Die Kopplung zwischen flächenzentrierten Geschwindigkeiten und dem Druckfeld ergibt sich aus dem Impulssatz zu:

$$\begin{aligned}
 c'_1 &= c_1 + \frac{\delta A_l}{M_l} p(i4) \delta t \\
 c'_r &= c_r - \frac{\delta A_r}{M_r} p(i4) \delta t \\
 c'_f &= c_f + \frac{\delta A_f}{M_f} p(i4) \delta t \\
 c'_d &= c_d - \frac{\delta A_d}{M_d} p(i4) \delta t \\
 c'_b &= c_b + \frac{\delta A_b}{M_b} p(i4) \delta t \\
 c'_t &= c_t - \frac{\delta A_t}{M_t} p(i4) \delta t
 \end{aligned}
 \tag{3.25}$$

Die im Nenner stehenden Ausdrücke werden als flächenzentrierte Massen bezeichnet und sind durch

$$\begin{aligned}
 M_l &= \frac{\rho}{2} \cdot (V|_{ijk} + V|_{imjk}) \\
 M_r &= \frac{\rho}{2} \cdot (V|_{ijk} + V|_{ipjk})
 \end{aligned}$$

$$M_f = \frac{\rho}{2} \cdot (V|_{ijk} + V|_{ijmk})$$

$$M_d = \frac{\rho}{2} \cdot (V|_{ijk} + V|_{ijpk})$$

$$M_b = \frac{\rho}{2} \cdot (V|_{ijk} + V|_{ijkm})$$

$$M_t = \frac{\rho}{2} \cdot (V|_{ijk} + V|_{ijkp})$$

gegeben.

Da nach den in Phase 1 durchgeführten Berechnungen die Geschwindigkeitskomponenten gemäß Gleichung (3. 21) im allgemeinen nicht die Kontinuitätsgleichung (3. 23) erfüllen, entsteht für jede reguläre Masche des Rechengebietes ein lokales Residuum D, für das

$$D = \vec{\nabla} \cdot \vec{u}$$

gilt. Integriert man diese Beziehung über ein Kontrollvolumen und überführt das Volumenintegral mit Hilfe des Gauß' schen Satzes in ein Oberflächenintegral, so ergibt sich:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \, dV = \int_A (\vec{u} \cdot \vec{n}) \, dA$$

Werden auf der linken Seite dieser Gleichung der Term $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ mit D bezeichnet und vor das Integral gezogen und das Oberflächenintegral der rechten Seite durch eine endliche Summe ersetzt, so erhält man eine diskrete Berechnungsvorschrift für die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes innerhalb eines regulären Kontrollvolumens:

$$D_{ijk} = \frac{1}{V_{ijk}} \sum_{\alpha=1}^6 (\vec{u} \cdot \vec{n})_{\alpha} \delta A_{\alpha} \quad (3. 26)$$

Gleichung (3. 26) verknüpft die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes für ein mitbewegtes Kontrollvolumen mit den Volumenströmen über die Kontrollraumboberfläche; es gilt:

$$\begin{aligned} \int_A (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA &= \sum_{\alpha=1}^6 (\vec{u} \cdot \vec{n})_{\alpha} \delta A_{\alpha} \\ &= (\vec{u} \cdot \vec{n})_l \delta A_l + (\vec{u} \cdot \vec{n})_r \delta A_r \\ &\quad + (\vec{u} \cdot \vec{n})_f \delta A_f + (\vec{u} \cdot \vec{n})_d \delta A_d \\ &\quad + (\vec{u} \cdot \vec{n})_b \delta A_b + (\vec{u} \cdot \vec{n})_t \delta A_t \end{aligned}$$

Bezeichnet man z. B. $(\vec{u} \cdot \vec{n})_l \delta A_l$ mit $\delta \dot{V}_l$ und führt für die restlichen Terme auf der rechten Seite analoge Abkürzungen ein, so kann

$$\int_A (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA = \delta \dot{V}_l + \delta \dot{V}_r + \delta \dot{V}_f + \delta \dot{V}_d + \delta \dot{V}_b + \delta \dot{V}_t$$

geschrieben werden. Die Berechnung der ein- und austretenden Volumenströme erfolgt dann mit Hilfe der flächenzentrierten Geschwindigkeiten. Da die Flächennormalenvektoren nach außen gerichtet sind, werden in das Kontrollvolumen eintretende Volumenströme negativ gezählt, während austretende Volumenströme positiv angesetzt werden. Aus Gleichung (3. 26) folgt, daß die Divergenz D_{ijk} kleiner als Null ist, wenn in eine Zelle insgesamt mehr Volumen ein- als ausfließt. Die zeitliche Änderung der ein- und austretenden Volumenströme ist aber nach Gleichung (3. 25) direkt proportional dem in der Zelle wirkenden Druck. Eine Erhöhung des Zelldruckes wirkt auf die eintretenden Volumenströme mindernd, während die austretenden Volumenströme hierdurch erhöht werden. Entsprechend erhöht eine Absenkung des Druckes innerhalb einer regulären Masche die eintretenden und vermindert die austretenden Volumenströme. Durch geeignete Wahl der Druckänderung δp kann also die "Inkompressibilitätsbedingung"

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$$

für eine Masche erfüllt werden.

So ruft z. B. eine Druckänderung $\delta p(i4)$ in der Zelle ijk eine Änderung der flächenzentrierten Geschwindigkeiten c'_a hervor, für die analog zu Gleichung (3. 25) gilt:

$$\begin{aligned} c_1^* &= c_1' + \frac{\delta A_l}{M_l} \cdot \delta p(i4) \cdot \delta t \\ c_r^* &= c_r' - \frac{\delta A_r}{M_r} \cdot \delta p(i4) \cdot \delta t \\ c_f^* &= c_f' + \frac{\delta A_f}{M_f} \cdot \delta p(i4) \cdot \delta t \\ c_d^* &= c_d' - \frac{\delta A_d}{M_d} \cdot \delta p(i4) \cdot \delta t \\ c_b^* &= c_b' + \frac{\delta A_b}{M_b} \cdot \delta p(i4) \cdot \delta t \\ c_t^* &= c_t' - \frac{\delta A_t}{M_t} \cdot \delta p(i4) \cdot \delta t \end{aligned} \quad (3. 27)$$

Die Folge ist eine Änderung des in diese Zelle ein- bzw. aus dieser Zelle austretenden Volumenstroms. Für die neue Divergenz D^* der Geschwindigkeiten c_a^* ergibt sich aus den Gleichungen (3. 26) und (3. 27):

$$D^* = D + \left[\frac{\delta A_l^2}{M_l} + \frac{\delta A_r^2}{M_r} + \frac{\delta A_f^2}{M_f} + \frac{\delta A_d^2}{M_d} + \frac{\delta A_b^2}{M_b} + \frac{\delta A_t^2}{M_t} \right] \cdot \frac{\delta p(i4) \cdot \delta t}{V(i4)}$$

Sollen das Geschwindigkeits- und das Druckfeld so aufeinander abgestimmt sein, daß Kontinuitäts- und Impulsgleichung erfüllt sind, muß gefordert werden, daß die Größe D^* zu Null wird. Damit ergibt sich für die Zelle ijk eine Berechnungsvorschrift für die bislang unbekannte Druckänderung $\delta p(i4)$:

$$\delta p(i4) = - \frac{D \cdot V(i4)}{\delta t \cdot \beta}$$

wobei die im Nenner stehende Größe β durch

$$\beta = \left[\frac{\delta A_l^2}{M_l} + \frac{\delta A_r^2}{M_r} + \frac{\delta A_f^2}{M_f} + \frac{\delta A_d^2}{M_d} + \frac{\delta A_b^2}{M_b} + \frac{\delta A_t^2}{M_t} \right]$$

gegeben ist. Die Korrektur der flächenzentrierten Geschwindigkeiten einer Zelle beeinflusst jedoch auch die umliegenden Maschen. Aus diesem Grund ist ein iteratives Vorgehen erforderlich und zwar solange, bis alle Zellen des Lösungsgebietes der "Inkompressibilitätsbedingung" genügen. Die Iteration wird solange fortgesetzt, bis die geforderte Genauigkeit erreicht ist, d. h. bis

$$\max_{ijk} \{ |D_{ijk}^{v+1}| - |D_{ijk}^v| \} < \epsilon, \quad v \text{ Iterationszähler}$$

erfüllt ist.

Während der Iteration ist es erforderlich, nicht nur die flächenzentrierten Geschwindigkeiten anzupassen, sondern auch die Auswirkungen der Änderungen im Druckfeld auf die in den Knoten des Maschennetzes abgespeicherten Geschwindigkeitskomponenten zu berücksichtigen. Die Druckänderungen werden während der Iteration zu

$$\delta p_g(i4) = \sum_{n=1}^{n^*} \delta p(i4)$$

aufsummiert, womit sich gemäß des Impulssatzes z. B. für die Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung des Knoten i1 die Berechnungsvorschrift

$$u^{***}(i1) = u^{**}(i1) + \frac{1}{4} \frac{\delta t \cdot \delta p_g(i4)}{MV(i1)} \cdot [-A_{1x}(i1) + A_{fx}(i4) + A_{bx}(i4)]$$

ergibt.

3.2.3.3 Die Phase 3

In den bisher erläuterten Phasen 1 und 2 des Algorithmus wurde eine Lagrange'sche Betrachtung des Strömungsvorgangs vollzogen, bei dem das Maschennetz mit der Strömung fortbewegt wurde. Um zu einer Euler'schen Betrachtungsweise zu gelangen, müssen die Knoten des Maschennetzes gleichsam wieder zu ihren ursprünglichen Koordinaten zurückgezogen werden, wobei ein Austausch von Masse zwischen den einen Knoten umgebenden Zellen entsteht. Dieser Austausch wird durch das Integral

$$\int_A (\rho \vec{u}) [(\vec{u} - \vec{U}) \cdot \vec{n}] dA$$

beschrieben, wobei für die Euler'sche Betrachtungsweise der Phase 3 die Geschwindigkeit $\vec{U}$ Null ist. Als zu lösendes Gleichungssystem dieser Phase erhält man damit:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{u} dV = - \int_A (\rho \vec{u}) (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA \quad (3.28)$$

Es hat sich als vorteilhaft herausgestellt, bei der Diskretisierung der Gleichung (3.28) als Kontrollvolumen eine reguläre Zelle zu benutzen, da dann der konvektive Impulsaustausch in gleicher Weise wie der Massenaustausch beschrieben wird [39, 41]. Zunächst berechnet

man aus den Knotengeschwindigkeiten für jede Zelle eine mittlere Impulsdichte. Für die drei Komponenten dieser Vektorgröße gilt:

$$(\rho u)|_{ijk} = \frac{\rho}{8} \cdot [u^{***}(i1) + u^{***}(i2) + u^{***}(i3) + u^{***}(i4) \\ + u^{***}(i5) + u^{***}(i6) + u^{***}(i7) + u^{***}(i8)]$$

$$(\rho v)|_{ijk} = \frac{\rho}{8} \cdot [v^{***}(i1) + v^{***}(i2) + v^{***}(i3) + v^{***}(i4) \\ + v^{***}(i5) + v^{***}(i6) + v^{***}(i7) + v^{***}(i8)]$$

$$(\rho w)|_{ijk} = \frac{\rho}{8} \cdot [w^{***}(i1) + w^{***}(i2) + w^{***}(i3) + w^{***}(i4) \\ + w^{***}(i5) + w^{***}(i6) + w^{***}(i7) + w^{***}(i8)]$$

(3. 29)

Das Oberflächenintegral auf der rechten Seite von Gleichung (3. 28) wird wieder durch eine endliche Summe ersetzt:

$$\int_A (\rho \vec{u}) \cdot (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA = \sum_{\alpha=1}^6 (\rho \vec{u})_{\alpha} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{n})_{\alpha} \delta A_{\alpha}$$

Durch skalare Multiplikation mit dem Einheitsvektor $\vec{i}$ ergibt sich hieraus für die x-Komponente:

$$\begin{aligned}
 \vec{i} \cdot \int_A (\rho \vec{u}) (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA &= \sum_{\alpha=1}^6 (\rho u)_{\alpha} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{n})_{\alpha} \cdot \delta A_{\alpha} \\
 &= (\rho u)_l \cdot (\vec{u} \cdot \vec{n})_l \cdot \delta A_l + (\rho u)_r \cdot (\vec{u} \cdot \vec{n})_r \cdot \delta A_r \\
 &+ (\rho u)_f \cdot (\vec{u} \cdot \vec{n})_f \cdot \delta A_f + (\rho u)_d \cdot (\vec{u} \cdot \vec{n})_d \cdot \delta A_d \\
 &+ (\rho u)_b \cdot (\vec{u} \cdot \vec{n})_b \cdot \delta A_b + (\rho u)_t \cdot (\vec{u} \cdot \vec{n})_t \cdot \delta A_t
 \end{aligned}
 \tag{3.30}$$

Die in dieser Gleichung stehenden Skalarprodukte $(\vec{u} \cdot \vec{n})_{\alpha}$, $\alpha = l, r, f, d, b, t$, sind durch die in Phase 2 iterativ verbesserten flächenzentrierten Geschwindigkeiten gegeben. Da die Impulsdichten (ρu) nicht auf den Oberflächen eines Kontrollvolumens definiert sind, ist es erforderlich, diese Funktionswerte aus benachbarten Werten zu interpolieren. Dabei hat sich gezeigt, daß eine einfache arithmetische Mittelung zweier benachbarter Werte zu instabilen Rechenverfahren führt [30]. Diese Schwierigkeit läßt sich durch das folgende Interpolationsverfahren umgehen [39].

Betrachtet man die in Bild 3.14 dargestellte unterlegte Oberfläche α zweier mit "1" und "2" bezeichneter, benachbarter Zellen, so wird z. B. für die Impulsdichte auf dieser Oberfläche folgender Ansatz gewählt:

$$\begin{aligned}
 (\rho \vec{u})_{\alpha} &= \frac{1}{2} \cdot \{ (\rho \vec{u})_g \cdot (1 + \alpha_0 + \beta_0 \cdot C^*) \\
 &\quad + (\rho \vec{u})_e \cdot (1 - \alpha_0 - \beta_0 \cdot C^*) \}
 \end{aligned}
 \tag{3.31}$$

Hierin ist $(\rho \vec{u})_g$ die Impulsdichte der stromaufwärts liegenden Zelle und $(\rho \vec{u})_e$ die Impulsdichte der Zelle, die stromabwärts zur betrachteten Oberfläche liegt. Der Ausdruck C^* ist durch

$$C^* = \frac{2 |\delta \vec{v}_{\alpha}| \delta t}{v_1 + v_2}$$

gegeben, und die Koeffizienten α_0 und β_0 sind positive, frei wählbare Größen, die aber der Ungleichung

$$0 \leq \alpha_0 + \beta_0 \leq 1$$

genügen müssen [39].

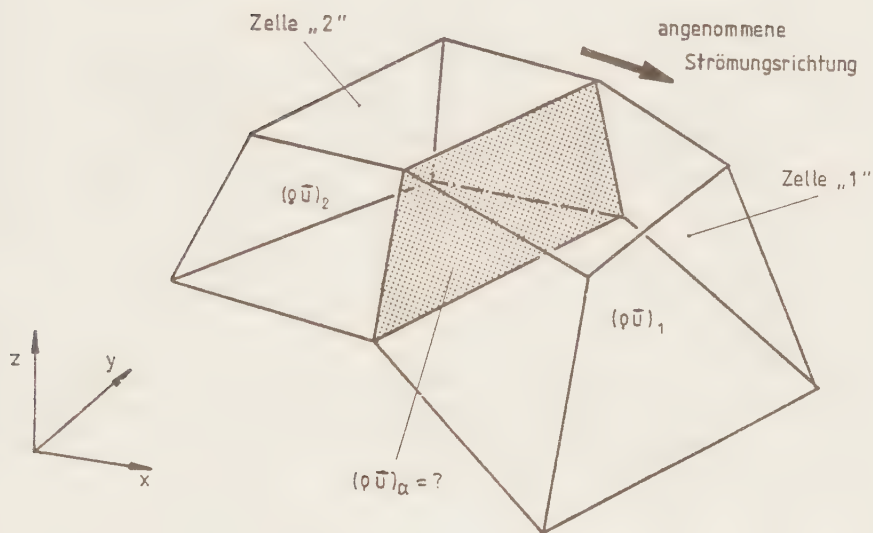


Bild 3.14: Zur Bestimmung der Impulsdichten auf den Kontrollraumoberflächen

Die Frage, welche Zelle stromaufwärts bzw. stromabwärts liegt, wird eindeutig durch die auf der Kontrollraumoberfläche definierten flächenzentrierten Geschwindigkeit entschieden. Werden die Approximation des Oberflächenintegrals nach Gleichung (3. 30) für das in

Bild 3.14 als Zelle "1" bezeichnete Kontrollvolumen ausgewertet und die unterlegte Oberfläche mit "left" assoziiert, so ergeben sich die folgenden Fälle:

Fall 1:

Die flächenzentrierte Geschwindigkeit $c_1 = (\vec{u} \cdot \vec{n})_1$ ist kleiner als Null, womit Zelle "2" stromaufwärts zu der betrachteten Zelle "1" liegt. Dann bezeichnet man die Zelle "2" als gebende Zelle und die Impulsdichte $(\rho \vec{u})_g$ wird

$$(\rho \vec{u})_g = (\rho \vec{u})_2$$

Dementsprechend ist dann Zelle "1" die empfangende Zelle und die Impulsdichte $(\rho \vec{u})_e$ ist durch

$$(\rho \vec{u})_e = (\rho \vec{u})_1$$

gegeben.

Fall 2:

Liegt die Zelle "2" stromabwärts zur Zelle "1", dann ist die flächenzentrierte Geschwindigkeit c_1 auf der gemeinsamen Oberfläche größer als Null. Die Impulsdichte $(\rho \vec{u})_g$ ist dann

$$(\rho \vec{u})_g = (\rho \vec{u})_1$$

während die Impulsdichte $(\rho \vec{u})_e$ durch

$$(\rho \vec{u})_e = (\rho \vec{u})_2$$

beschrieben wird.

Zusammenfassend können die beiden Fälle durch

$$(\vec{\rho\vec{u}})_a = \begin{cases} (\vec{\rho\vec{u}})_1 & , \text{ falls } c_a > 0 \\ (\vec{\rho\vec{u}})_2 & , \text{ falls } c_a < 0 \end{cases}$$

$$(\vec{\rho\vec{u}})_e = \begin{cases} (\vec{\rho\vec{u}})_1 & , \text{ falls } c_a < 0 \\ (\vec{\rho\vec{u}})_2 & , \text{ falls } c_a > 0 \end{cases}$$

dargestellt werden.

Die Auswirkungen der Interpolationsformel (3. 31) auf das Stabilitätsverhalten des Rechenverfahrens werden im Anhang A2 dargelegt.

Bei der Berechnung der Impulsdichten auf den sechs Kontrollraumoberflächen werden rechenzeitintensive Entscheidungsabfragen durch die Einführung sogenannter Flußkoeffizienten

$$a_l = \alpha_0 \cdot \text{sign}(\delta V_l) + 2 \beta_0 \cdot \frac{\delta V_l}{v|_{imjk} + v|_{ijk}}$$

$$a_r = \alpha_0 \cdot \text{sign}(\delta V_r) + 2 \beta_0 \cdot \frac{\delta V_r}{v|_{ipjk} + v|_{ijk}}$$

$$a_f = \alpha_0 \cdot \text{sign}(\delta V_f) + 2 \beta_0 \cdot \frac{\delta V_f}{v|_{imjk} + v|_{ijk}}$$

$$a_d = \alpha_0 \cdot \text{sign}(\delta V_d) + 2 \beta_0 \cdot \frac{\delta V_d}{v|_{ijpk} + v|_{ijk}}$$

$$a_b = \alpha_0 \cdot \text{sign}(\delta V_b) + 2 \beta_0 \cdot \frac{\delta V_b}{v|_{ijkm} + v|_{ijk}}$$

$$a_t = \alpha_0 \cdot \text{sign}(\delta V_t) + 2 \beta_0 \cdot \frac{\delta V_t}{v|_{ijkp} + v|_{ijk}}$$

vermieden, wobei man die Größen δV_α , $\alpha = l, r, f, d, b, t$ als Austauschvolumina bezeichnet, und durch

$$\delta V_l = c_l^* \cdot \delta A_l \cdot \delta t = + c_l^*(i4) \cdot \delta A_l(i4) \cdot \delta t$$

$$\delta V_r = c_r^* \cdot \delta A_r \cdot \delta t = - c_r^*(i1) \cdot \delta A_r(i1) \cdot \delta t$$

$$\delta V_f = c_f^* \cdot \delta A_f \cdot \delta t = + c_f^*(i4) \cdot \delta A_f(i4) \cdot \delta t$$

$$\delta V_d = c_d^* \cdot \delta A_d \cdot \delta t = - c_d^*(i3) \cdot \delta A_d(i3) \cdot \delta t$$

$$\delta V_b = c_b^* \cdot \delta A_b \cdot \delta t = + c_b^*(i4) \cdot \delta A_b(i4) \cdot \delta t$$

$$\delta V_t = c_t^* \cdot \delta A_t \cdot \delta t = - c_t^*(i8) \cdot \delta A_t(i8) \cdot \delta t$$

mit den auf den Oberflächen definierten flächenzentrierten Geschwindigkeiten verknüpft sind.

Mit den oben angegebenen Flußkoeffizienten lassen sich die Impulsdichten auf den Kontrollraumoberflächen durch

$$(\rho \vec{u})_l = \frac{1}{2} \cdot [(1 + a_l) \cdot (\rho \vec{u})|_{ijk} + (1 - a_l) \cdot (\rho \vec{u})|_{imjk}]$$

$$(\rho \vec{u})_r = \frac{1}{2} \cdot [(1 + a_r) \cdot (\rho \vec{u})|_{ijk} + (1 - a_r) \cdot (\rho \vec{u})|_{ipjk}]$$

$$(\rho \vec{u})_f = \frac{1}{2} \cdot [(1 + a_f) \cdot (\rho \vec{u})|_{ijk} + (1 - a_f) \cdot (\rho \vec{u})|_{ijmk}]$$

$$(\rho \vec{u})_d = \frac{1}{2} \cdot [(1 + a_d) \cdot (\rho \vec{u})|_{ijk} + (1 - a_d) \cdot (\rho \vec{u})|_{ijpk}]$$

$$(\rho \vec{u})_b = \frac{1}{2} \cdot [(1 + a_b) \cdot (\rho \vec{u})|_{ijk} + (1 - a_b) \cdot (\rho \vec{u})|_{ijkm}]$$

$$(\rho \vec{u})_t = \frac{1}{2} \cdot [(1 + a_t) \cdot (\rho \vec{u})|_{ijk} + (1 - a_t) \cdot (\rho \vec{u})|_{ijkp}]$$

berechnen.

Das Volumenintegral auf der linken Seite von Gleichung (3. 28) beschreibt die zeitliche Änderung der Impulsdichte innerhalb eines Kontrollvolumens aufgrund konvektiver Austauschvorgänge von Impuls. Wird das Volumenintegral approximiert, so folgt zusammen mit Gleichung (3. 32) für die Änderung der Impulsdichte $\delta(\rho u)$ in x-Richtung:

$$\begin{aligned} \vec{i} \cdot \int_A (\rho \vec{u}) \cdot (\vec{u} \cdot \vec{n}) \, dA \cdot \delta t &= -V \big|_{ijk} \cdot \delta(\rho u) \big|_{ijk} \\ &= \frac{1}{2} \{ \delta V_l (1 - a_l) (\rho u) \big|_{imjk} + \delta V_r (1 - a_r) (\rho u) \big|_{ipjk} \\ &\quad + \delta V_f (1 - a_f) (\rho u) \big|_{ijmk} + \delta V_d (1 - a_d) (\rho u) \big|_{ijpk} \\ &\quad + \delta V_b (1 - a_b) (\rho u) \big|_{ijkm} + \delta V_t (1 - a_t) (\rho u) \big|_{ijkp} \\ &\quad + [\delta V_l (1 + a_l) + \delta V_r (1 + a_r) + \delta V_f (1 + a_f) \\ &\quad + \delta V_d (1 + a_d) + \delta V_b (1 + a_b) + \delta V_t (1 + a_t)] (\rho u) \big|_{ijk} \end{aligned}$$

(3. 33)

Gleichung (3. 33) kann für jede Zelle des Lösungsgebietes ausgewertet werden, so daß schließlich sämtliche Impulsdichteänderungen aufgrund konvektiver Austauschvorgänge bekannt sind. Diese Änderungen müssen noch auf die Geschwindigkeitskomponenten in den Knoten des Maschennetzes verteilt werden, wobei hier von einer gleichmäßigen Verteilung auf die acht Knoten einer regulären Zelle ausgegangen wird. So ergibt sich z. B. für die x-Komponente der Geschwindigkeit im Knoten il:

$$u^{n+1}(il) = u^{***}(il) + \frac{1}{8 \, MV(il)} \cdot \delta(\rho u) \big|_{ijk}$$

Die vorhergehenden Abschnitte beschreiben den in drei Phasen aufgeteilten Algorithmus zur numerischen Lösung der differentiellen Bewegungsgleichungen. An dieser Stelle ist ein vollständiger Iterations-, d. h. Zeitschritt - bestehend aus den Berechnungen der Phase 1, Phase 2 und Phase 3 - beendet. Nun muß festgestellt werden, ob die erreichte Genauigkeit den Anforderungen bereits entspricht. Ist dies nicht der Fall, erfolgt ein erneutes Durchlaufen des Algorithmus, wobei das Geschwindigkeits- und das Druckfeld des gerade abgeschlossenen Zeitschrittes als Ausgangswerte für den neuen Zeitschritt Verwendung finden. Ist dagegen die geforderte Genauigkeitsschranke unterschritten oder ein anderes Abbruchkriterium erfüllt, wird die Rechnung an dieser Stelle beendet.

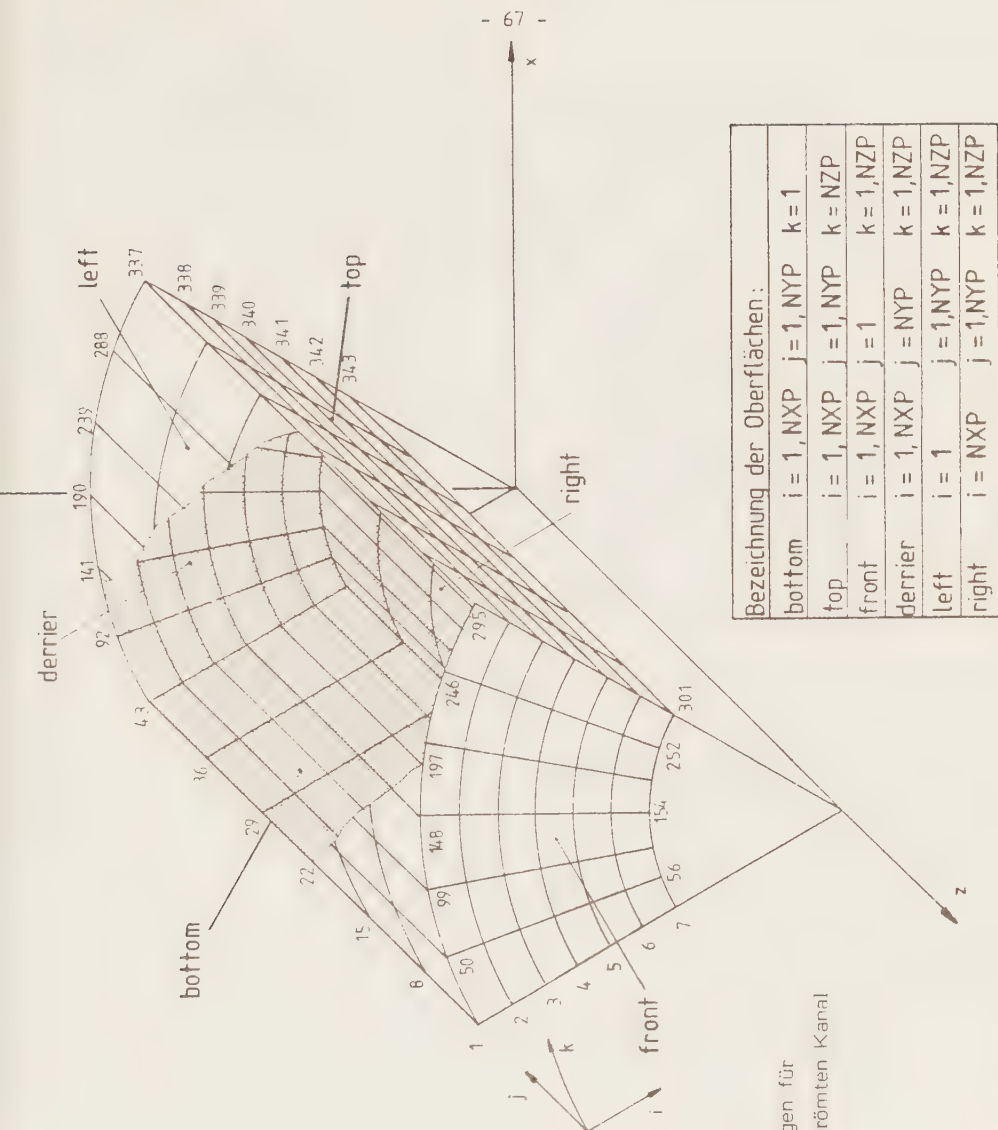
Die Lösung der problembeschreibenden Gleichungen (3. 1) und (3. 2) wird erst durch die Angabe von Randbedingungen eindeutig. Der nächste Abschnitt behandelt die hier verwendeten Randbedingungen.

3.3 Die Behandlung der Randbedingungen

Am Beispiel eines in Bild 3.15 dargestellten Kanals sollen die Randbedingungen erläutert werden. Der Kanal wird von "left" nach "right" durchströmt und ist in z- und in Umfangsrichtung von festen Wänden begrenzt, die mit "front", "derrier", "bottom" und "top" bezeichnet werden. Das Maschennetz besteht aus einer Anzahl von Zellen, und zwar NX-Zellen in i-Richtung, NY-Zellen in j-Richtung und NZ-Zellen in k-Richtung. Die Anzahl der Knoten in jeder Richtung ist um eins größer als die entsprechende Zellenzahl.

Die vorzugebenden Randbedingungen für die strömungsmechanische Berechnung eines solchen Kanals sind:

- in den Knoten der Eintrittsfläche die Geschwindigkeitsverteilung u_E, v_E, w_E ;
- in den Knoten auf den Kanalwänden die Haftbedingung $u_W = v_W = w_W = 0$;
- in den Knoten der Austrittsfläche z. B. die Geschwindigkeitsverteilung u_A, v_A, w_A .



Bezeichnung der Oberflächen :

bottom	i = 1, NXP	j = 1, NYP	k = 1
top	i = 1, NXP	j = 1, NYP	k = NXP
front	i = 1, NXP	j = 1	k = 1, NXP
derrier	i = 1, NXP	j = NYP	k = 1, NXP
left	i = 1	j = 1, NYP	k = 1, NXP
right	i = NXP	j = 1, NYP	k = 1, NXP

Bild 3.15: Randbedingungen für
einen durchströmten Kanal

Die Vorgabe der Geschwindigkeitsverteilung in den Knoten der Austrittsfläche bereitet im allgemeinen große Probleme, da sie häufig nicht bekannt ist, aber bei Unterschallströmungen das Geschwindigkeits- und das Druckfeld im Inneren des Lösungsgebietes nachhaltig beeinflusst. Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Geschwindigkeitskomponenten auf der Austrittsebene gleich denen auf der direkt benachbarten, stromaufwärtsliegenden Ebene zu setzen. Zusätzlich muß für die Berechnungen der Phase 3 an der Ein- und Austrittsfläche des Rechengebietes der entsprechende, aus der jeweiligen Geschwindigkeitsverteilung berechnete, Impulsdichtevektor gesetzt werden, da sonst die Impulsdichteänderung im Inneren des Lösungsgebietes nicht korrekt berechnet werden kann. Durch die Verwendung des versetzten Gitters sind dagegen Randbedingungen für das Druckfeld nicht erforderlich [4].

Für Berechnungen in anderen Bauteilen von Fluidenergiemaschinen, wie z. B. in Rückführkanälen mehrstufiger Radialpumpen oder im Leitrad eines hydrodynamischen Wandlers mit anschließender 90°-Umlenkung, werden statt der Haftbedingung sogenannte periodische Randbedingungen benutzt. Unter Voraussetzung einer periodischen Wiederholung der Fluidströmung in Umfangsrichtung von Teilung zu Teilung reicht es aus, nur eine einzige Teilung numerisch zu untersuchen. In diesem Fall werden auf den mit "bottom" und "top" bezeichneten Randflächen in den Bereichen, in denen keine Wandbelastung vorliegt, Strömungsgrößen periodisch "weitergegeben", wie anhand des Bildes 3.16 erläutert werden soll.

Hierin ist das Maschennetz in einem als schaufellosem Ringraum ausgebildeten ebenen Plattendiffusor dargestellt, wobei angenommen wird, daß sich die Fluidströmung nach dem Winkel $\delta\varphi$ in Umfangsrichtung periodisch wiederholt. Die Durchströmung erfolgt von "left" nach "right", während auf den mit "bottom" und "top" gekennzeichneten Rändern periodische Randbedingungen gelten. Bezüglich der Grenzen "bottom" und "top" wird angenommen, daß sich die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors in Radial- und Umfangsrichtung nicht ändern. Das bedeutet z. B. für den in Bild 3.16 dargestellten

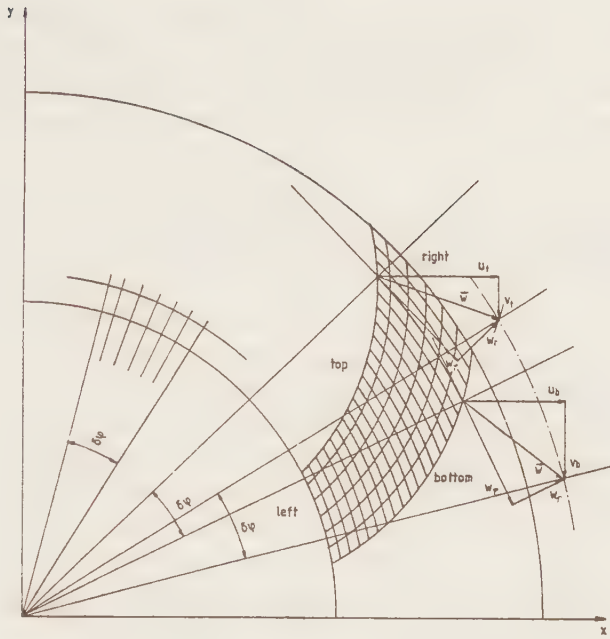


Bild 3.16: Zur Verwendung von periodischen Randbedingungen

Vektor $\vec{w}$:

$$w_r(\text{top}) = w_r(\text{bottom})$$

$$w_\varphi(\text{top}) = w_\varphi(\text{bottom})$$

Wird die periodische Randbedingung allerdings für die kartesischen Komponenten u und v des Vektors formuliert, so ist die Abhängigkeit vom Teilungswinkel $\delta\varphi$ zu berücksichtigen:

$$u_b = u_t \cos \delta\varphi - v_t \sin \delta\varphi$$

$$v_b = u_t \sin \delta\varphi + v_t \cos \delta\varphi$$

wobei der Winkel $\delta\varphi$ im mathematisch positiven Sinn gezählt wird. Die im dreidimensionalen Fall zusätzlich zu berücksichtigende Komponente in z-Richtung kann an den periodischen Rändern gleichgesetzt werden:

$$w_b = w_t$$

3.4 Das Turbulenzmodell

Die Mehrzahl aller in der Technik vorkommenden Strömungen sind turbulent. Wesentliches Merkmal einer turbulenten Strömung ist eine der geordneten Grundströmung überlagerte zufallsbedingte Schwankungsbewegung. Die instationäre Navier-Stokes-Gleichung gilt grundsätzlich auch für die Strömungsform der Turbulenz; das Hauptproblem bei der numerischen Lösung für eine turbulente Strömung liegt in dem sehr großen Speicher- und Rechenzeitbedarf, da das Lösungsgebiet in sehr viele Zellen unterteilt werden muß, um wesentliche Einzelheiten des Turbulenzmechanismus erfassen zu können. Die Längenmaße der kleinsten Turbulenzballen liegen nach Truckenbrodt [24] für eine Gasströmung in der Größenordnung von 10^{-2} cm. Besteht das Lösungsgebiet aus einem Würfel mit einer Kantenlänge von 1 cm, so müßte das Rechenggebiet in 10^6 Zellen aufgeteilt werden. Für die praktische Anwendung ist im allgemeinen ein solch kleines Lösungsgebiet völlig uninteressant, da die hier betrachteten Geometrien ein Vielfaches an Volumen besitzen.

Durch die in Abschnitt 2.2 beschriebene zeitliche Mittelwertbildung entstehen in der Bewegungsgleichung zusätzliche Terme, die sich in ähnlicher Weise wie die viskosen Spannungen einer laminaren Strömung auf den Strömungszustand auswirken und als Reynolds' sche Spannungen bezeichnet werden [24, 40]. Nach einem Ansatz von Boussinesq gilt:

$$\Pi_t = 2 \mu_t \operatorname{def} \vec{u}$$

wobei im Gegensatz zu der laminaren Strömung der Proportionalitäts-

faktor μ_t kein konstanter Stoffwert, sondern eine vom jeweiligen Strömungszustand abhängige Ortsfunktion ist.

Die Bestimmung des als Wirbelviskosität bezeichneten Proportionalitätsfaktors μ_t stellt eine große Schwachstelle aller numerischen Verfahren dar, da an dieser Stelle ein empirischer Ansatz in die Rechnung einfließen muß. Die Ermittlung der ortsabhängigen Wirbelviskosität geschieht im folgenden über die Prandtl'sche Mischungsweghypothese [Gleichung (2. 11)]. Für ein kartesisches Koordinatensystem gilt:

$$\mu_t = \rho \cdot l^2 \sqrt{2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2} \quad (3. 34)$$

Die hier auftauchenden Differentialquotienten werden durch Differenzenquotienten ersetzt. Die unbekannte Mischungsweglänge l berechnet man nach einer von Schlichting [26] angegebenen Beziehung:

$$\frac{1}{l} = 0,14 - 0,08 \left(1 - \frac{s}{l} \right)^2 - 0,06 \left(1 - \frac{s}{l} \right)^4 \quad (3. 35)$$

die in Kanälen mit hohen Reynolds-Zahlen $Re > 10^5$ gute Ergebnisse liefert [8, 10]. Hierin ist s die Entfernung des betrachteten Punktes zur nächsten Kanalwand und b die halbe Breite des Kanals. In Wandnähe erfolgt die Berechnung der Wirbelviskosität μ_t nicht nach Gleichung (3. 34), sondern es wird einer von Neumann [10] beschriebenen Vorgehensweise gefolgt, da in Wandnähe die Differenzenquotienten infolge der angenommenen linearen Änderung der Geschwindigkeitskomponenten entlang der Zellkanten zu groß bestimmt werden.

Messungen turbulenter Strömungen zeigen in Wandnähe eine stark eingeschränkte Schwankungsbewegung, wodurch innerhalb einer Schicht der Stärke δ ein viskoser Strömungszustand vorliegt, an die sich der turbulente Bereich anschließt (Bild 3.17).

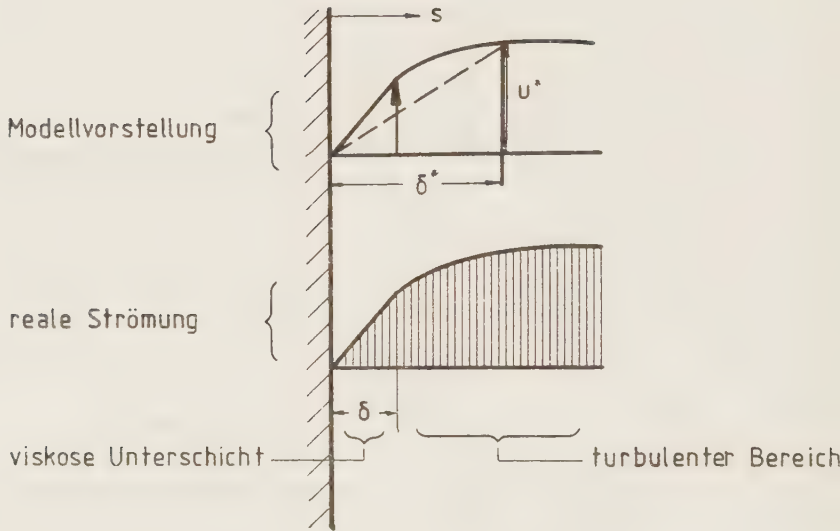


Bild 3.17: Turbulente Geschwindigkeitsverteilung in der Nähe einer Wand

In der viskosen Unterschicht können die Reynolds' schen gegebenüber den Zähigkeitsbedingten Spannungen vernachlässigt werden; für diese gilt:

$$\tau = \mu \frac{du}{ds} \quad (3. 36)$$

Dieser viskose Bereich erstreckt sich nach Truckenbrodt [24] für eine Strömung in einem geraden Kanal bis zu einem Abstand von

$$\delta = 11,6 \frac{\nu}{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}} \quad (3. 37)$$

mit der Wandschubspannung τ_w und der kinematischen Zähigkeit ν . Im turbulenten Bereich gilt nach dem Ansatz von Boussinesq mit

der Prandtl'schen Mischungswegformel

$$\tau = \rho \, l^2 \left(\frac{du}{ds} \right)^2$$

wobei der Einfluß der laminaren Viskosität vernachlässigt worden ist. Der in diese Gleichung einzusetzende Mischungsweg l kann aus der Beziehung (3. 35) berechnet werden, in dem man z. B. nach [42] die Potenzausdrücke in eine Reihe entwickelt:

$$l = 0,40 \, s - 0,44 \left(\frac{s^2}{b} \right) + \dots$$

wobei man Terme höherer Ordnung vernachlässigt. Für das hier betrachtete wandnahe Gebiet können in guter Näherung auch die Terme zweiter Ordnung fortgelassen werden, so daß sich für die Schubspannung im turbulenten Bereich

$$\tau = 0,16 \, \rho \, s^2 \left(\frac{du}{ds} \right)^2 \quad (3. 38)$$

ergibt. Die in den Gleichungen (3. 36) und (3. 38) auftretenden Schubspannungen sind nach Truckenbrodt [24] in Wandnähe konstant und somit gleich der Wandschubspannung.

Damit ergibt sich der Geschwindigkeitsverlauf durch Integration

- von Gleichung (3. 36) in der viskosen Unterschicht zu

$$u(s) = \frac{\tau_w}{\mu} s \quad 0 \leq s < \delta \quad (3. 39)$$

- von Gleichung (3. 38) im turbulenten Bereich zu

$$u(s) = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \left[11,6 + \frac{1}{0,4} \ln \left(\frac{\rho}{11,6 \, \mu} s \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \right) \right] \quad s \geq \delta \quad (3. 40)$$

wobei als Randbedingungen die Haftbedingung an der Wand

$$u_w = u(s = 0) = 0$$

und bei $s = \delta$ die Geschwindigkeit

$$u(\delta) = 11,6 \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

gelten.

Zur Bestimmung der unbekannten Wandschubspannung τ_w wird als zusätzliche Bedingung die Geschwindigkeit u^* an einer Stelle δ^* vorgegeben. Nimmt man an, daß

$$\delta^* > \delta$$

ist, so folgt aus der Beziehung (3. 40) eine iterativ zu lösende Gleichung für die Wandschubspannung:

$$Re_\tau = \frac{Re^*}{11,6 + \frac{1}{0,4} \ln \frac{1}{11,6} + \frac{1}{0,4} \ln Re_\tau}; \quad (3. 41)$$

hierin bedeuten

$$Re_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \cdot \frac{\delta^*}{\nu}$$

und

$$Re^* = \frac{u^* \cdot \delta^*}{\nu}$$

Die durch Gleichung (3. 41) implizit beschriebene Funktion

$$Re_\tau = Re_\tau(Re^*)$$

ist in Bild 3.18 dargestellt.

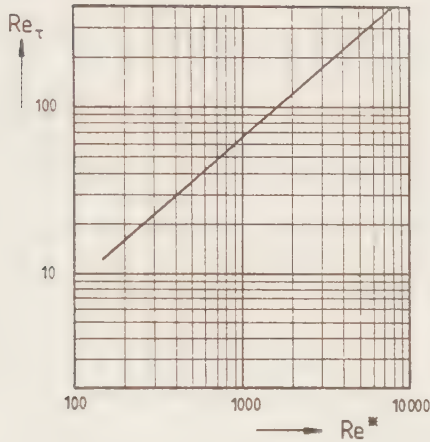


Bild 3.18: Verlauf der Funktion $Re_{\tau} = Re_{\tau}(Re^*)$ [Gleichung (3. 41)]

Das Rechenverfahren könnte den durch die Gleichungen (3. 39) bzw. (3. 40) gegebenen Geschwindigkeitsverlauf zwischen den Stützstellen nicht verwirklichen, da zur Diskretisierung der Kontinuitäts- und der Bewegungsgleichung ein linearer Verlauf angenommen wurde, wie er in Bild 3.17 eingezeichnet ist.

Um aber die nach Gleichung (3. 41) sich ergebende Wandschubspannung

$$\tau_w = Re_{\tau}^2 \frac{\mu^2}{\rho \delta^{*2}}$$

zu erhalten, wird nach Neumann [10] in dem Bereich von der Wand bis zur wandnächsten Stützstelle als Proportionalitätsfaktor zwischen der Schubspannung und dem Geschwindigkeitsgradienten die Größe

$$\mu^* = \frac{Re_{\tau}}{Re^*} \mu$$

benutzt, die sowohl in ihrer Bedeutung als auch in ihrer Dimension einer Viskosität entspricht. Zur Berechnung dieses Proportionalitäts-

faktors μ^* muß in allen wandnächsten Stützstellen die Geschwindigkeit u^* bekannt sein, da nach Gleichung (3. 41) die Größe Re_τ von der mit dieser Geschwindigkeit u^* gebildeten Größe Re^* abhängt. Da u^* aber zunächst nicht bekannt ist, wird von Schätzwerten ausgegangen, die im Laufe der Rechnung verbessert werden.

4. Die Behandlung der Geometrie

Bei der Lösung partieller Differentialgleichungen auf numerischem Wege wird das Lösungsgebiet in viele Knotenpunkte aufgeteilt, die miteinander verbunden die Zellen des Rechengebietes ergeben. Die stetigen Felder der zu bestimmenden Größen Druck und Geschwindigkeit werden durch diskrete Werte z. B. in den Knoten des Maschennetzes ersetzt. Das verwendete Maschennetz bestimmt dabei die Qualität der Lösung, denn im allgemeinen wird bei höherer Stützpunktdichte die numerische Lösung dem realen Strömungsfeld in zunehmendem Maße angenähert. Die Knotenpunkte sollen möglichst effektiv auf das Lösungsgebiet verteilt werden, da die maximale Gitterpunktzahl von der Kapazität der zur Verfügung stehenden Rechenanlage, insbesondere von deren Rechengeschwindigkeit und Speicherkapazität, abhängt. In verschiedenen Bereichen des Lösungsgebietes, wie z. B. in der Nähe von Randflächen, auf denen die Haftbedingung gilt, sind große Gradienten der zu berechnenden Größen zu erwarten. Das Maschennetz sollte dafür entsprechend feiner strukturiert werden, um eine hinreichende Genauigkeit gewährleisten zu können, denn diese Randbereiche bestimmen den Charakter der Lösung im Inneren des Rechengebietes wesentlich.

Maschennetze können besonders flexibel gestaltet werden, wenn auf Orthogonalität und Äquidistanz der Verbindungslinien zwischen den Knoten verzichtet wird. Dabei ist es sinnvoll, das Maschennetz so zu wählen, daß die Randflächen des Lösungsgebietes mit Koordinatenflächen zusammenfallen. Die Randbedingungen durch komplizierte Interpolationsvorschriften in die Rechnung einzubringen, wie es z. B. bei Verwendung eines orthogonalen, äquidistanten Maschennetzes erforderlich ist, erübrigt sich dann.

Ein grundlegendes Vorgehen bei der numerischen Erzeugung eines Maschennetzes besteht in der Abbildung des beliebig geformten physikalischen Rechengebietes auf einen Einheitswürfel im logischen

Raum (Bild 4.1).

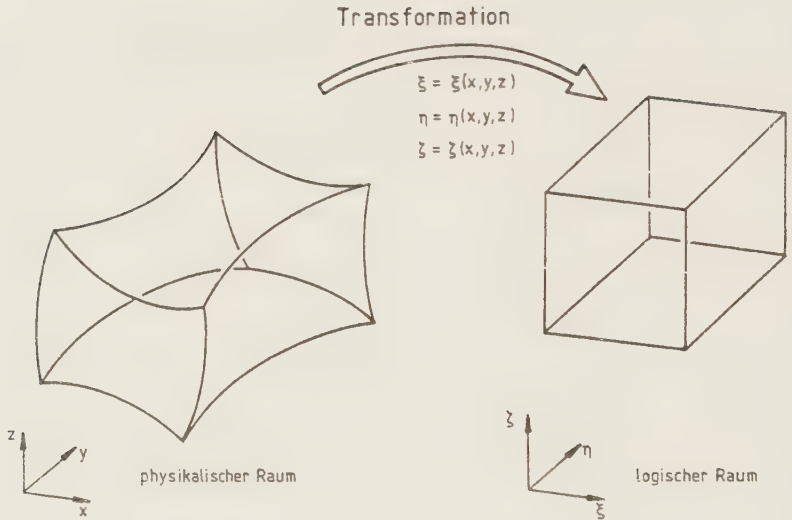


Bild 4.1: Zur Abbildung des physikalischen Rechengebietes auf den Einheitswürfel im logischen Raum

Es wird die Koordinatentransformationsvorschrift gesucht, und sie ist als eine eindeutige Funktion z. B. in der Form

$$\xi = \xi(x, y, z) \quad , \quad \eta = \eta(x, y, z) \quad , \quad \zeta = \zeta(x, y, z)$$

bzw. als Umkehrfunktion

$$x = x(\xi, \eta, \zeta) \quad , \quad y = y(\xi, \eta, \zeta) \quad , \quad z = z(\xi, \eta, \zeta)$$

darstellbar. Das Auffinden dieser Abbildungsfunktion ist Aufgabe der Gittergenerierungsverfahren [50].

Für das hier verwendete Finite-Volumen-Verfahren reicht die Kenntnis dreier Koordinatenwerte, z. B. das Koordinatentripel (x, y, z) , für jeden Knoten im Maschennetz aus. Im Gegensatz zu den Finite-Differenzen-Verfahren, bei denen im allgemeinen die problembeschreibenden partiellen Differentialgleichungen in dem krummlinigen, konturangepaßten Koordinatensystem (ξ, η, ζ) formuliert und gelöst werden, müssen die Metrikkoeffizienten, welche die Koordinatentransformation beschreiben, bei diesem Rechenverfahren nicht berechnet werden.

Die im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Programme zur Netzgenerierung erlauben zwei Vorgehensweisen:

- Beschreibung der Geometrie des Lösungsgebietes durch analytische Koordinaten, wobei gegebenenfalls das Rechengebiet aus mehreren in unterschiedlichen Koordinatensystemen beschriebenen Segmenten zusammengesetzt werden kann (Bild 4.2);
- Zusammensetzen des Rechengebietes aus erzeugten ebenen Flächen, die z. B. durch Drehung oder einfaches Aneinanderreihen das dreidimensionale Rechengebiet ergeben (Bild 4.3).



Bild 4.2: Zusammensetzung des Rechengebietes aus in analytischen Koordinatensystemen beschriebenen Segmenten

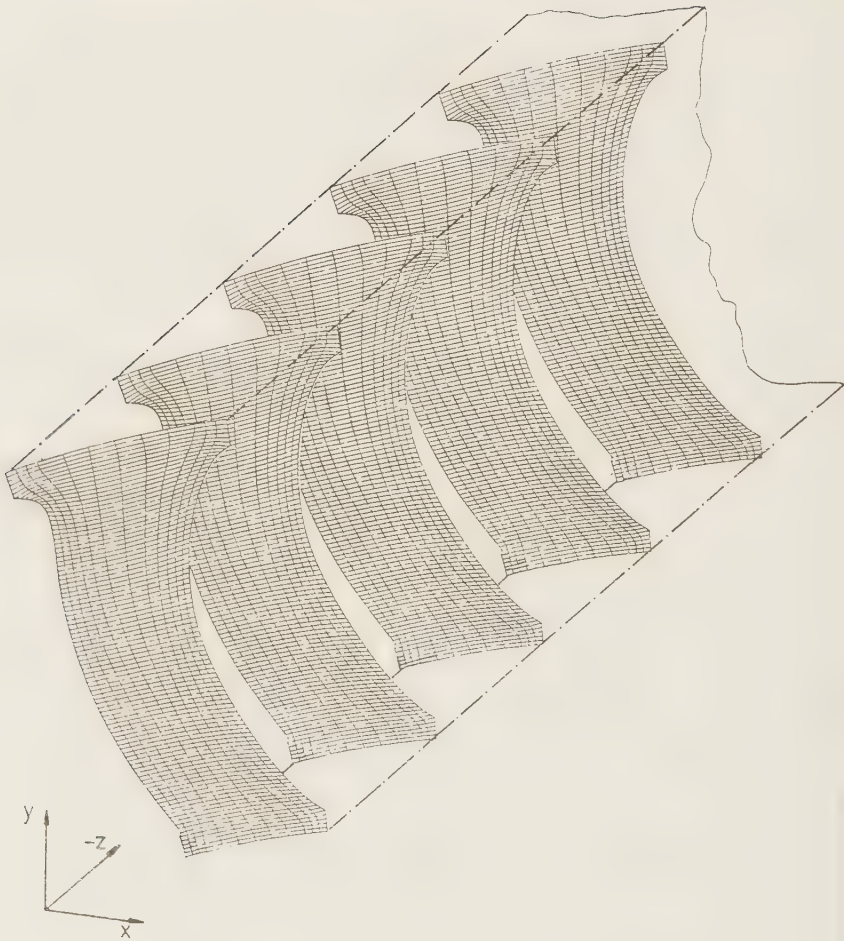


Bild 4.3: Aneinanderreihung mehrerer ebener Flächen

Bei dem letztgenannten Verfahren ist also nur eine zweidimensionale Gittergenerierung erforderlich, wobei allerdings im Hinblick auf spätere Anwendungen eine einfache Erweiterung auf drei Dimensionen möglich sein muß.

4.1 Methoden zur numerischen Netzgenerierung

Die heute bekannten Methoden zur numerischen Netzgenerierung werden nach Thompson [47] drei Kategorien zugeordnet:

- konforme Abbildung ;
- algebraische Methoden ;
- differentielle Methoden .

Die konforme Abbildung ist auf den ebenen Fall beschränkt, benutzt aber analytische Transformationsvorschriften, wobei komplizierte Strömungsgebiete durch eine Folge einfacher Abbildungen auf die Bildebene transformiert werden. Ein besonderes Problem stellt hierbei die gewünschte Einflußmöglichkeit auf die Stützpunktdichte in gewissen Bereichen des Rechengebietes dar, wodurch die Konformität gestört werden kann [47].

Die Netzerzeugung mit Hilfe algebraischer Methoden liefert vielfach sehr schnelle Verfahren, bei denen die Randpunkte vorgebar sind, was im allgemeinen vorteilhaft bei der interaktiven Erstellung von Maschennetzen ist. Bei diesem Typ von Gittergenerierungsverfahren werden mittels vorgegebener algebraischer Funktionen Maschenpunkte durch Interpolation zwischen den Rändern bzw. Randflächen im Inneren des Gebietes erzeugt. Häufig werden Randpunkte nicht durch analytische Funktionen beschrieben, sondern als Punkthaufen z. B. aus einer Werkstattzeichnung vorgegeben, wobei dann im allgemeinen eine Spline-Interpolation des Randes erforderlich wird [48, 50].

Die differentiellen Methoden schließlich sind wegen ihrer großen Flexibilität, des kontinuierlichen Verlaufes der Koordinatenlinien und wegen ihrer einfachen Erweiterbarkeit auf drei Dimensionen weit verbreitet [49]. Die krummlinigen, konturangepaßten Koordinaten werden als Lösung eines Systems partieller Differentialgleichungen mit Dirichlet'schen Randbedingungen berechnet, wobei

für jede Koordinatenrichtung des transformierten Gebietes eine Differentialgleichung zu lösen ist. Dies soll im nachfolgenden für den ebenen Fall näher erläutert werden.

4.2 Die automatische Netzgenerierung mit Hilfe elliptischer Differentialgleichungen

Die Verwendung partieller Differentialgleichungen in der numerischen Netzgenerierung stellt eine hochentwickelte Technik dar. Hierbei nutzt man die Eigenschaften der Lösung der netzerzeugenden Differentialgleichung aus, um das Maschennetz zu generieren [29]. Neben dem vereinzelt Einsatz hyperbolischer Differentialgleichungen werden hauptsächlich partielle Differentialgleichungen vom elliptischen Typ zur Netzerzeugung herangezogen.

Die vielen Vorteile der Netzgenerierung mit Hilfe von elliptischen partiellen Differentialgleichungen erstrecken sich z. B. auf Maschennetze mit "glatten" Gitterlinien und auch ohne Singularitäten. Ebenso können komplizierte Randflächenstrukturen leicht behandelt werden. Bei dieser Methode ist es allerdings schwierig, die Verteilung der Knoten im Inneren des Rechengebietes zu beeinflussen.

Für eine eindeutige, umkehrbare Abbildungsvorschrift ist zu fordern, daß die Funktionaldeterminante der Abbildung J , die den Zusammenhang zwischen den kartesischen und den krummlinigen Koordinaten beschreibt, im gesamten Lösungsgebiet von Null verschieden ist. Diese Funktionaldeterminante wird mit dem Symbol

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)}$$

bezeichnet und ist durch

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} = \begin{vmatrix} x_{\xi} & x_{\eta} & x_{\zeta} \\ y_{\xi} & y_{\eta} & y_{\zeta} \\ z_{\xi} & z_{\eta} & z_{\zeta} \end{vmatrix}$$

definiert.

Bei zweidimensionalen, krummlinigen Koordinaten erhält man als Spezialfall folgende Formel:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = x_{\xi} y_{\eta} - x_{\eta} y_{\xi}$$

Diese Funktionaldeterminante beschreibt die Abbildung des orthogonalen, äquidistanten logischen Gebietes auf das physikalische Rechengebiet. Wie man erkennt, ist für die Existenz der Funktionaldeterminante erforderlich, daß sämtliche partiellen Ableitungen der Funktionen $x(\xi, \eta)$ und $y(\xi, \eta)$ der Abbildung existieren. Nach Thompson, Thames und Mastin [51] ist dies dann der Fall, wenn die Extremwerte der Funktionen auf den Rändern des Lösungsgebietes liegen.

Auf den Randkurven des Strömungsgebietes gibt man im physikalischen Gebiet diskrete Werte vor, die als Randbedingungen die Lösung der elliptischen Differentialgleichung bestimmen. Diese physikalischen Koordinaten korrespondieren mit Punkten auf den Koordinatenlinien des logischen Gebietes. Am Beispiel eines ebenen Schnittes durch den Leitradkanal wird die Vorgehensweise verdeutlicht. Die in acht Segmente Γ_1 bis Γ_8 unterteilten Randkurven dieses Strömungsgebietes werden auf ein rechteckiges Gebiet abgebildet (Bild 4.4). Dabei werden die Randkurven Γ_1 auf Γ_1^* , Γ_2 auf Γ_2^* usw. abgebildet, wobei der Umlaufsinn beliebig ist. Im logischen Gebiet besitzen die Randsegmente Γ_4^* und Γ_8^* konstante ξ -Werte, während den übrigen Randkurven konstante η -Werte zugeordnet sind.

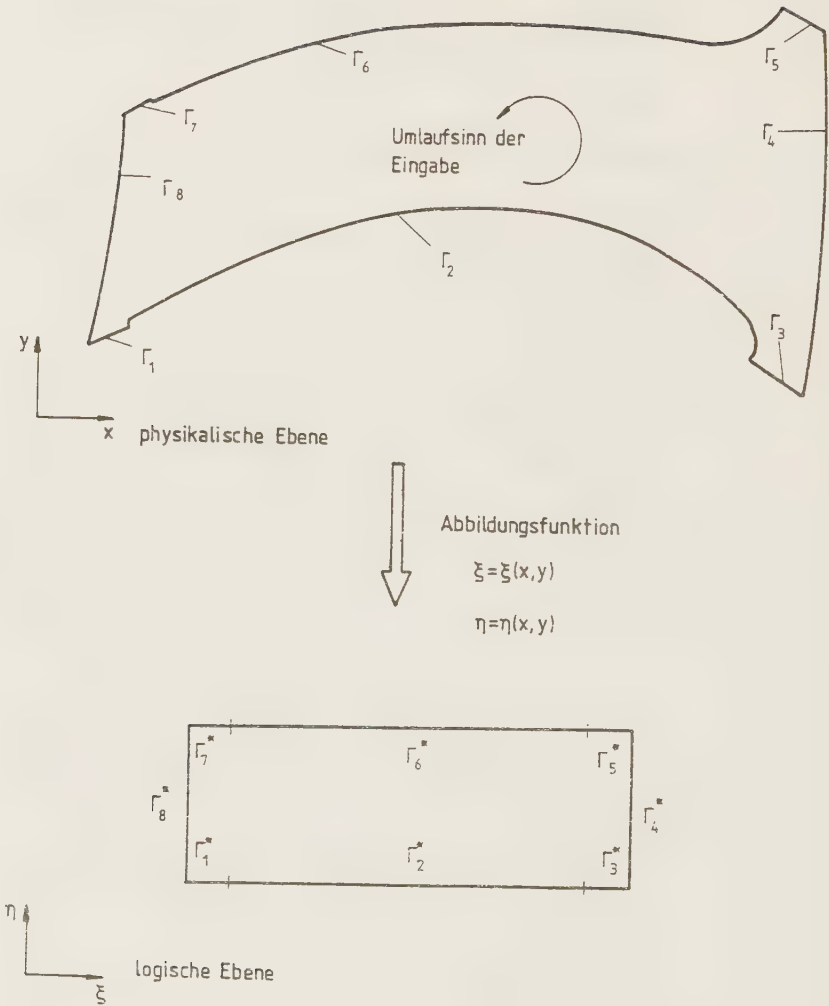


Bild 4.4: Abbildung des Leitschaufelkanals

Zweckmäßigerweise werden als Abbildungsfunktionen harmonische Funktionen gewählt, da diese die oben geforderten Eigenschaften

aufweisen. Nach Bronstein [42] genügen harmonische Funktionen der als Laplace' schen Differentialgleichung bezeichneten homogenen Potentialgleichung, so daß z. B. für die gesuchten Abbildungsfunktionen $\xi = \xi(x,y)$ und $\eta = \eta(x,y)$ gilt:

$$\Delta \xi = 0 \quad (4. 1a)$$

$$\Delta \eta = 0 \quad (4. 1b)$$

Um die Verteilung der Gitterpunkte im Inneren des Lösungsgebietes beeinflussen zu können, werden nicht die homogenen Potentialgleichungen (4. 1a und 4. 1b) gelöst, sondern geeignete Quellterme P und Q eingebracht, mit denen ein Steuern der Netzlinienstaffelung möglich ist:

$$\Delta \xi = P(\xi, \eta) \quad (4. 2a)$$

$$\Delta \eta = Q(\xi, \eta) \quad (4. 2b)$$

Das Gleichungssystem (4. 2) liefert als Lösung die funktionalen Zusammenhänge $\xi = \xi(x,y)$ und $\eta = \eta(x,y)$; für die praktische Anwendung werden jedoch die Umkehrfunktionen

$$x = x(\xi, \eta)$$

$$y = y(\xi, \eta)$$

gesucht. Aus diesem Grund vertauscht man die Variablen der Gleichungen (4. 2a) und (4. 2b), was einer Abbildung obiger Beziehungen auf das logische Rechengebiet gleichkommt. Es ergibt sich ein System zweier elliptischer, partieller Differentialgleichungen der Form [51]:

$$\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} = -J^2 (P x_{\xi} + Q x_{\eta}) \quad (4. 3a)$$

$$\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} = -J^2 (P y_{\xi} + Q y_{\eta}) \quad (4. 3b)$$

Hierin ist:

$$\alpha = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2$$

$$\beta = x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta}$$

$$\gamma = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2$$

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)}$$

Dieses Gleichungssystem wird z. B. auf iterativem Wege in dem mit einem äquidistanten Maschennetz überzogenen logischen Gebiet gelöst und ergibt die (x,y)-Koordinaten jedes Punktes der physikalischen Ebene.

Als Beispiel zeigt Bild 4.5 einen Teil des Maschennetzes im Leitradkanal des hydrodynamischen Wandlers, dessen Koordinaten für einen Schnitt $z = \text{konst.}$ eine Lösung des Gleichungssystems (4. 3) sind.

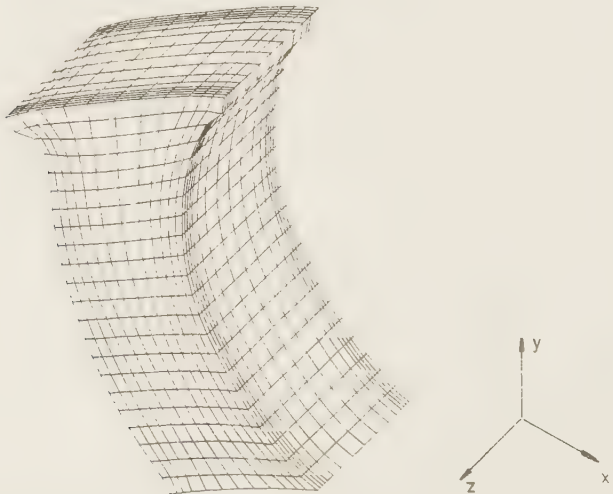


Bild 4.5: Leitradkanal des hydrodynamischen Wandlers

Für die Störfunktionen $P(\xi, \eta)$ und $Q(\xi, \eta)$ wurden, einem Vorschlag von Thompson [51] folgend, Exponentialfunktionen gewählt. Durch geeignete Vorgabe der frei wählbaren Parameter ist dann die gewünschte Verteilung der Netzklinien zu erzielen.

5. Vergleich mit bekannten Lösungen der Navier-Stokes-Gleichung

Sowohl die Genauigkeit des Rechenverfahrens als auch die Fehlerlosigkeit der Programmierung sind durch Nachrechnen bekannter Lösungen der Navier-Stokes-Gleichung überprüft worden. Im einzelnen handelt es sich dabei um:

- eine laminare, vollausgebildete Spaltströmung (Poiseuille-Strömung);
- eine laminare Strömung in konvergierenden und divergierenden Kanälen (Hamel'sche Strömung);
- eine turbulente, vollausgebildete Spaltströmung;
- eine turbulente, vollausgebildete Kanalströmung.

Die ausgewählten Beispiele lassen Vergleiche mit bekannten Lösungen zu, sprechen dabei aber unterschiedliche Mechanismen des mathematischen Modells an. Auskunft über die Leistungsfähigkeit des mathematischen Modells bei Strömungen in Geometrien allgemeiner Gestalt gibt insbesondere die Nachrechnung der laminaren Strömung in konvergierenden und divergierenden Kanälen, da die Ränder des Rechengebietes nicht durch Koordinatenlinien des kartesischen Koordinatensystems darstellbar sind. Darüber hinaus bleiben die nichtlinearen konvektiven Terme der Navier-Stokes-Gleichung bei der Hamel'schen Strömung erhalten und verschwinden nicht wie bei der Poiseuille-Strömung im gesamten Lösungsgebiet.

Die Beispiele, die die turbulente Strömungsform behandeln, sind in der Literatur mit halbempirischen Gesetzmäßigkeiten über den Verlauf der Reibungszahl λ belegt. Diese dienen zur Überprüfung des verwendeten Turbulenzmodells.

5.1 Die vollausgebildete laminare Spaltströmung

Die sogenannte Poiseuille-Strömung [55] ist eine stationäre, ebene, reibungsbehaftete, vollausgebildete Strömung in einem parallelwandigen Kanal, wobei der Einfluß der Viskosität des Fluids im ganzen Strömungsquerschnitt bemerkt werden kann.

Eine analytische Lösung der Impulserhaltungsgleichung (2. 2) und der Kontinuitätsgleichung (2. 1) ergibt sich bei Vernachlässigung der Feldkraft und unter Annahme einer stationären Schichtenströmung. Dabei ist nur eine Geschwindigkeitskomponente $u = u(y)$ vorhanden, während die andere verschwindet, $v = 0$. Bild 5.1 zeigt die resultierende parabolische Geschwindigkeitsverteilung über der Spalthöhe, die von der Lauflänge x unabhängig ist.

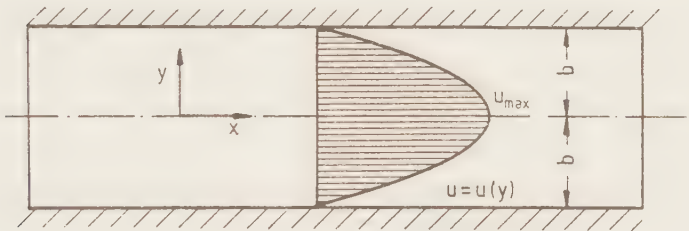


Bild 5.1: Parabolische Geschwindigkeitsverteilung der vollausgebildeten laminaren Spaltströmung

Der statische Druck p ist im Strömungsquerschnitt konstant und hängt im Gegensatz zu der Geschwindigkeitsverteilung nur von der Lauflänge x ab. Für die parabolische Geschwindigkeitsverteilung gilt die Beziehung

$$u(y) = - \frac{1}{2\mu} (b^2 - y^2) \frac{dp}{dx} \quad (5. 1)$$

wobei sich die Strömungsgeschwindigkeit proportional dem konstanten Druckgefälle $(-dp/dx)$ verhält. Wird die Strömungsgeschwindigkeit in Kanalmitte mit $u_{\max}$ bezeichnet, so folgt aus Gleichung

(5. 1) das Druckgefälle:

$$\frac{dp}{dx} = - \frac{2\mu}{b^2} u_{\max} \quad (5. 2)$$

Hieraus resultiert für einen Spalt der Länge l eine Druckänderung Δp zu:

$$\Delta p = - 2 \mu \frac{1}{b^2} u_{\max} \quad (5. 3)$$

Für die Nachrechnung einer Kanalströmung wurde ein parabolisches Geschwindigkeitsprofil am Eintritt mit einem Maximalwert von $u_{\max} = 0,015 \frac{m}{s}$ vorgegeben. Die Viskosität des Fluids wurde mit $\mu = 0,001 \text{ Pa s}$ angenommen.

Mit diesen Werten ergibt sich aus Gleichung (5. 2) ein Druckgefälle von:

$$\frac{dp}{dx} = - 0,012 \frac{Pa}{m}$$

Die Ergebnisse der Nachrechnung zeigt Bild 5.2. Die Abweichungen der berechneten Geschwindigkeitsverteilungen in allen Querströmungsebenen bezogen auf das parabolische Geschwindigkeitsprofil am Eintritt betragen weniger als $10^{-6}\%$, d. h. die Geschwindigkeitskomponente u hängt nicht von der x -Koordinate ab; die Geschwindigkeitskomponente in y -Richtung v ist im gesamten Lösungsgebiet betragsmäßig kleiner als 10^{-8} m/s (Bild 5.2a). Der statische Druck p ist gemäß Bild 5.2b für eine Querströmungsebene über der Kanalbreite konstant und nimmt in Strömungsrichtung linear ab.



a)



b)

Linien konstanten Druckes:	
$\Delta p = 9,231 \cdot 10^{-4} \text{ N/m}^2$	
1	p_{bez}
2	$p_{\text{bez}} + \Delta p$
3	$p_{\text{bez}} + 2 \cdot \Delta p$
4	$p_{\text{bez}} + 3 \cdot \Delta p$
5	$p_{\text{bez}} + 4 \cdot \Delta p$
6	$p_{\text{bez}} + 5 \cdot \Delta p$
7	$p_{\text{bez}} + 6 \cdot \Delta p$
8	$p_{\text{bez}} + 7 \cdot \Delta p$
9	$p_{\text{bez}} + 8 \cdot \Delta p$
10	$p_{\text{bez}} + 9 \cdot \Delta p$
11	$p_{\text{bez}} + 10 \cdot \Delta p$
12	$p_{\text{bez}} + 11 \cdot \Delta p$

Bild 5.2: Die vollausgebildete, laminare Strömung in einem ebenen, parallelwandigen Kanal
a) Geschwindigkeitsvektoren
b) Isobaren

Ein Unterschied zwischen der nach Gleichung (5. 3) analytisch berechnbaren Druckänderung Δp und dem numerischen Ergebnis ist nicht festzustellen (Bild 5.3), d. h. das verwendete Rechenverfahren liefert für die Poiseuille-Strömung exakte Werte.

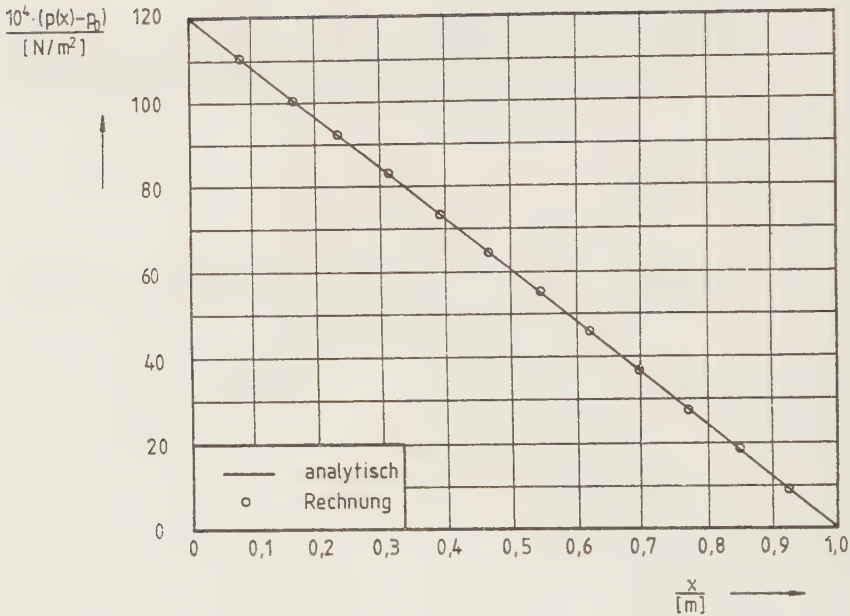


Bild 5.3: Berechnete Druckänderung Δp im Vergleich zu der analytischen Lösung nach Gleichung (5. 3)

5.2 Die Hamel' sche Strömung in konvergierenden und divergierenden Kanälen

Hamel [52] untersuchte die Bewegung eines viskosen Fluids zwischen zwei unter einem Winkel α zueinander geneigten, ebenen Wänden. Diese Bewegung ist für einen konvergierenden Kanal in Bild 5.4 perspektivisch dargestellt.

Vorausgesetzt wird eine rein radiale Strömung, die man durch Anordnen einer Linien-Quelle oder einer Linien-Senke im Schnittpunkt der beiden ebenen Wände erzeugen kann. Eine Linien-Quelle ergibt eine Fluidbewegung in einem divergierenden Kanal, während die

Strömung in einem konvergierenden Kanal aus der Vorgabe einer

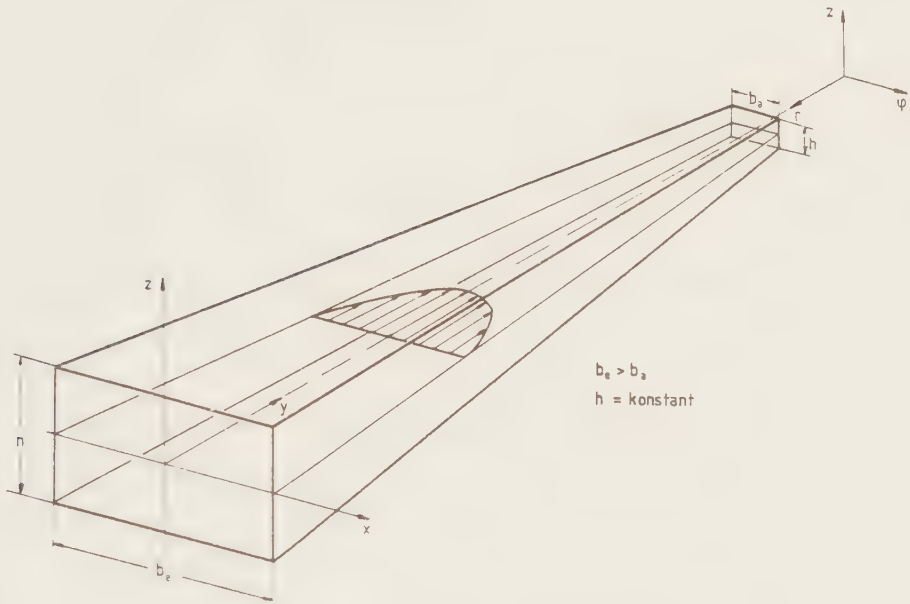


Bild 5.4: Viskose Strömung in einem konvergierenden Kanal

Unter diesen Voraussetzungen vereinfachen sich die Kontinuitäts- und die Impulserhaltungsgleichung in Zylinderkoordinaten für die Geschwindigkeitskomponenten $v_r = v_r(r, \theta)$ in radialer und $v_\theta = 0$ in tangentialer Richtung zu:

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) = 0 \quad (5.4)$$

Impulserhaltungsgleichung

radiale Richtung:

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{v_r}{r^2} \right] \quad (5.5)$$

tangentielle Richtung:

$$0 = - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \quad (5.6)$$

Aus der Kontinuitätsgleichung (5. 4) ergibt sich durch Integration

$$v_r = \frac{1}{r} F(\theta) \quad (5.7)$$

Eliminiert man den statischen Druck aus den Impulserhaltungsgleichungen (5. 5) und (5. 6), so resultiert mit Hilfe von Gleichung (5. 7) eine gewöhnliche, nichtlineare Differentialgleichung dritter Ordnung:

$$F'(\theta) F(\theta) + \frac{\mu}{\rho} F'''(\theta) + \frac{4}{\rho} \frac{\mu}{r} F'(\theta) = 0 \quad (5.8)$$

Als Randbedingung ist an den Kanalwänden die Haftbedingung

$$F = 0 \quad \text{für } \theta = \pm \alpha$$

zu erfüllen. Zusätzlich muß nach Batchelor [53] ein Maß für die Intensität der Strömung in die Rechnung eingebracht werden. Neben der Definition eines Volumenstromes $\dot{V}$

$$\dot{V} = \int_{-\alpha}^{+\alpha} F \, d\theta$$

kann man die größte Fluidgeschwindigkeit F_0/r für einen gegebenen Radius r wählen. Da die Größe (αr) die Kanalweite charakterisiert,

wird eine die Strömung beschreibende Reynolds-Zahl durch

$$Re = \frac{\alpha F_0}{\nu \rho}$$

definiert.

Mit der Definition der dimensionslosen Variablen

$$\eta = \frac{\theta}{\alpha}$$

und

$$f = \frac{F}{F_0}$$

ergibt sich aus der Differentialgleichung (5. 8):

$$2 \alpha Re f f' + f''' + 4 \alpha^2 f' = 0 \quad (5. 9)$$

Die unbekannte Funktion f muß die Bedingungen

$$f = 0 \quad \text{bei } r = \pm 1$$

und

$$f' = 0 \quad \text{bei } \eta = 0$$

erfüllen [53].

Millsaps und Pohlhausen [54] geben eine analytische Lösung der Differentialgleichung (5. 9) in Form elliptischer Integrale für bestimmte Parameterwerte ($\alpha \cdot Re$) an.

Eine andere Lösungsmöglichkeit besteht in der numerischen Integration der gewöhnlichen Differentialgleichung (5. 9) z. B. mit Hilfe des Verfahrens von Runge-Kutta. Allerdings muß dabei die Differential-

gleichung dritter Ordnung auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung zurückgeführt werden [z. B. 55]. Die so erhaltene Lösung wird dann mit dem Ergebnis der zweidimensionalen Version des in Kapitel 3 beschriebenen Rechenverfahrens verglichen.

5.2.1 Die Strömung in konvergierenden Kanälen

Dieses Rechenverfahren kann keine punktförmige Quell- oder Senkenströmung nachbilden, daher ist das Rechengebiet nach Bild 5.5 aus drei Teilgebieten zusammengesetzt.

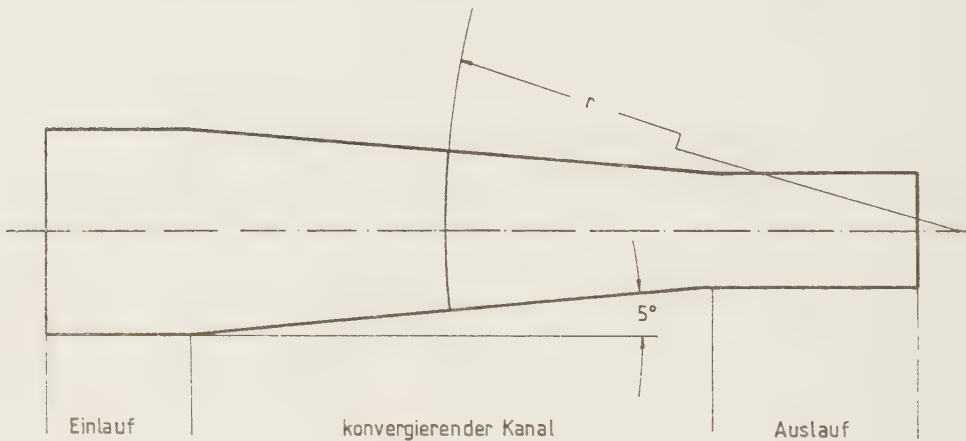


Bild 5.5: Geometrie des Rechengebietes für die numerische Lösung der Hamel'schen Strömung

An ein parallelwandiges Einlaufstück schließt sich der konvergierende Kanal an, dessen Öffnungswinkel 2α zu 10° gewählt wird, und der wieder in ein Auslaufgebiet mit parallelen Rändern übergeht. Die mit dem Verfahren von Runge-Kutta ermittelte Lösung der Gleichung (5. 9) wird mit dem numerischen Ergebnis des Rechenverfahrens in einer mittleren, in Bild 5.5 durch den Radius r gekennzeichneten, Ebene des konvergierenden Zwischen-

stücks verglichen. Dort kann in guter Näherung angenommen werden, daß die von der Ein- und Auslaufstrecke aufgeprägten Störungen abgeklungen sind.

Am Eintritt in das Einlaufgebiet wurde die Geschwindigkeitskomponente v in y -Richtung Null gesetzt, während man für die Geschwindigkeitskomponente u in x -Richtung ein parabolisches Profil gewählt hat. Je nach Vorgabe der Größe des in Kanalmitte befindlichen Geschwindigkeitsmaximums konnten verschiedene Reynolds-Zahlen eingestellt werden. Als Stoffgrößen wurden für die dynamische Viskosität μ

$$\mu = 0,001 \text{ Pa s}$$

und für die Dichte ρ

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$

vorgegeben.

Diese numerischen Untersuchungen erzielten folgendes Ergebnis: Bei geringen und mittleren Reynolds-Zahlen konnte eine sehr gute Übereinstimmung zwischen analytischer¹ und numerischer Lösung nachgewiesen werden. Bei höheren Reynolds-Zahlen gelang dies jedoch nicht mehr. In diesem Fall reichte die bei allen betrachteten Strömungsfällen konstant gehaltene Stützpunktdichte in Wandnähe nicht mehr aus, die großen Geschwindigkeitsgradienten genügend genau nachzubilden. Bild 5.6 stellt diese Ergebnisse dar.

¹ Unter 'analytischer Lösung' wird hier die mit Hilfe des Runge-Kutta-Verfahrens gefundene Lösung der Gleichung (5.9) verstanden.

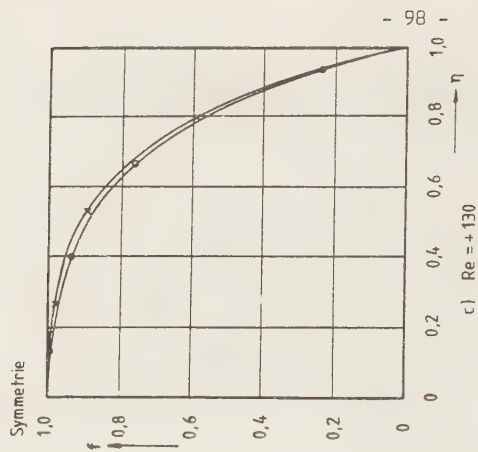
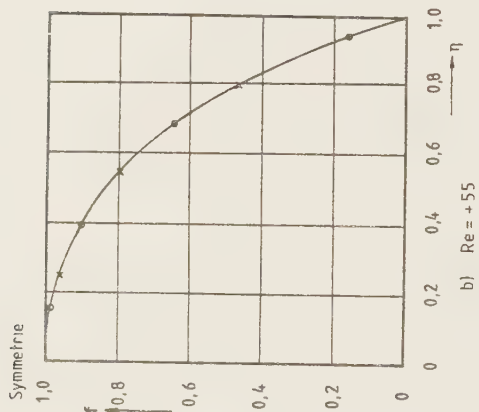
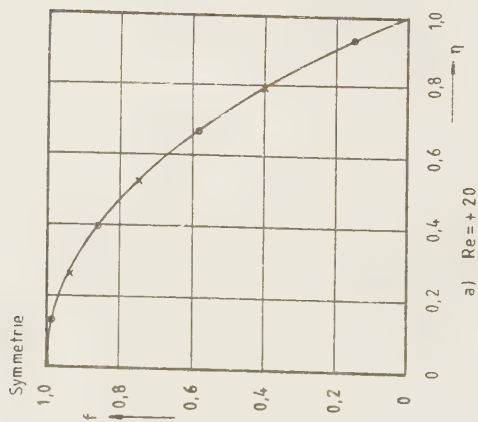


Bild 5.6: Vergleich der Ergebnisse des numerischen Verfahrens mit der analytischen Lösung der Hamel'schen Strömung in konvergierenden Kanälen

Da das Geschwindigkeitsfeld vollkommen symmetrisch zur Kanalmittellinie ist, wird nur eine Hälfte des Strömungsgebietes betrachtet. Über dem dimensionslosen Öffnungswinkel $\eta = \theta/\alpha$ des konvergierenden Kanals sind sowohl die dimensionslosen exakten Lösungen, als auch die aus dem numerischen Verfahren resultierenden Radialkomponenten

$$v_r = u \cos \theta + v \sin \theta$$

aufgetragen. Die Geschwindigkeit v_r wurde auf die jeweilige Maximalgeschwindigkeit bezogen. Die Umfangskomponenten der Geschwindigkeit

$$v_\theta = v \cos \theta - u \sin \theta$$

waren im ungünstigsten Fall kleiner als 1 % der maximalen Radialgeschwindigkeit, so daß die Vorgabe der rein radialen Strömung in dem betrachteten Bereich erfüllt ist.

Bild 5.7 zeigt die prozentuale Abweichung der numerischen von der analytischen Lösung. Der relative Fehler der numerischen Lösung für die Radialkomponente der Geschwindigkeit berechnet sich nach:

$$\epsilon_{v_r} = \frac{|v_r \text{ numerisch} - v_r \text{ exakt}|}{v_r \text{ exakt}} \cdot 100 \%$$

Da der maximale Fehler selbst im Fall der größten betrachteten Reynolds-Zahl nur bei etwa 4 % liegt, kann von guter Übereinstimmung der numerischen und analytischen Lösung gesprochen werden.

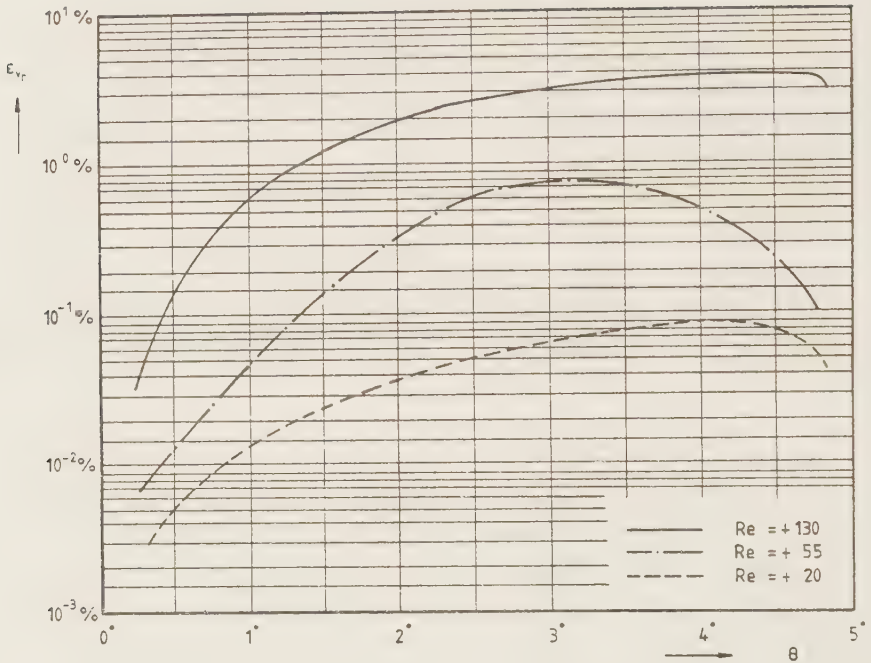


Bild 5.7: Prozentualer Fehler bei der Hamel' schen Strömung in konvergierenden Kanälen

Das durch Vektoren gekennzeichnete Geschwindigkeitsfeld nach Bild 5.8a zeigt für den Fall der niedrigen Reynolds-Zahl

$$Re = + 20$$

die Entwicklung einer in axialer Richtung verlaufenden Strömung im Einlauf zu radial gerichteten Vektoren im konvergierenden Teil. Im Auslauf richtet sich das Geschwindigkeitsprofil wieder axial aus und nimmt erneut Parabelform an.

Die Isobarendarstellung des Druckfeldes in Bild 5.8b deutet bei Symmetrie zur Mittellinie einen kontinuierlichen Druckabfall in Strömungsrichtung an.



a)



b)

Linien konstanten Druckes:

$$\Delta p = 39,897 \cdot 10^{-6} \text{ N/m}^2$$

1	p_{bez}
2	$p_{\text{bez}} + \Delta p$
3	$p_{\text{bez}} + 2 \cdot \Delta p$
4	$p_{\text{bez}} + 3 \cdot \Delta p$
5	$p_{\text{bez}} + 4 \cdot \Delta p$
6	$p_{\text{bez}} + 5 \cdot \Delta p$
7	$p_{\text{bez}} + 6 \cdot \Delta p$
8	$p_{\text{bez}} + 7 \cdot \Delta p$
9	$p_{\text{bez}} + 8 \cdot \Delta p$
10	$p_{\text{bez}} + 9 \cdot \Delta p$
11	$p_{\text{bez}} + 10 \cdot \Delta p$
12	$p_{\text{bez}} + 11 \cdot \Delta p$
13	$p_{\text{bez}} + 12 \cdot \Delta p$

Übertrieben dargestellte Geschwindigkeitsverteilung im konvergierenden Kanalabschnitt

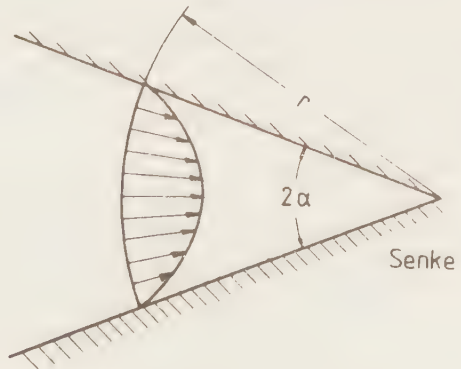


Bild 5.8: Konvergierende Kanalströmung bei

einer Reynolds-Zahl $Re = + 20$

a) Geschwindigkeitsvektoren

b) Isobaren

5.2.2 Die Strömung in divergierenden Kanälen

Die numerische Untersuchung erforderte die Unterteilung des Rechengebietes in ebenfalls drei Bereiche (Bild 5.9).

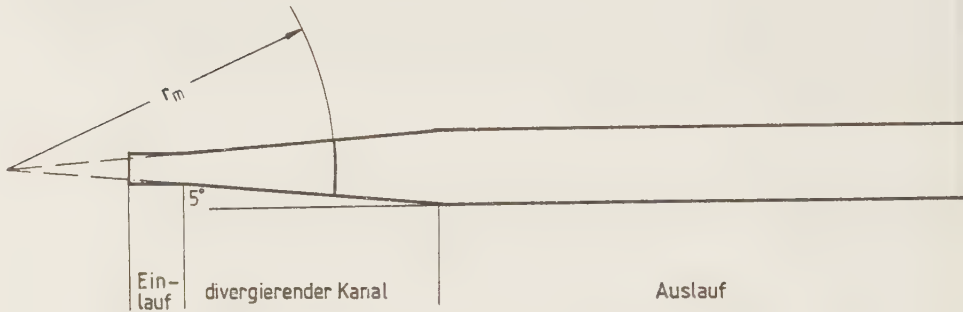


Bild 5.9: Rechengebiet für den Fall der divergierenden Kanalströmung

An den parallelwandigen Einlauf schließt sich der divergierende Kanal mit einem Öffnungswinkel 2α von 10° an, der wiederum in ein Auslaufgebiet mit parallelen Wänden übergeht. Zur Bestimmung der numerischen Lösung wurden am Eintritt in das Rechengebiet in axialer Richtung ein parabolisches Geschwindigkeitsprofil vorgegeben und die Querströmungskomponente zu Null gesetzt. Der Maximalwert des Eintrittsgeschwindigkeitsprofils wurde so gewählt, daß sich im divergierenden Kanal für den Radius r_m eine Reynolds-Zahl von

$$Re = + 50$$

einstellte.

Bei dieser Reynolds-Zahl resultiert, wie im Fall des konvergierenden Kanals, eine gute Übereinstimmung zwischen dem analytischen und dem numerischen Ergebnis (Bild 5.10). Hierbei ergab sich im wandnächsten Punkt eine maximale Abweichung von

$$\varepsilon_{v_r} = 0,5 \%$$

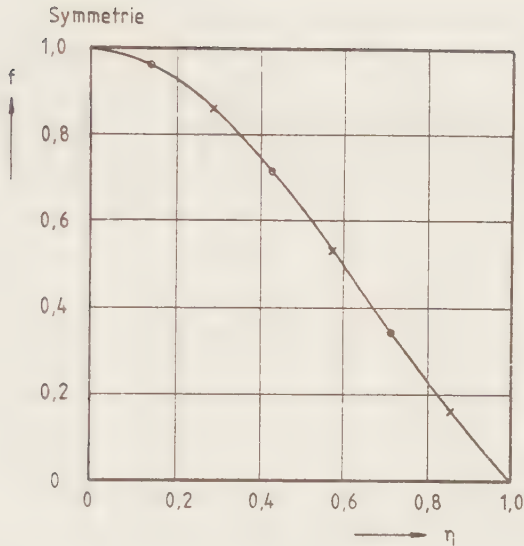


Bild 5.10: Vergleich zwischen analytischem und numerischem Ergebnis für die Hamel'sche Strömung in einem divergierenden Kanal

In Bild 5.11 ist die Diffusorströmung durch Geschwindigkeitsvektoren und Isobaren dargestellt. Im divergierenden Bereich des Rechengebietes verflacht das Eintrittsgeschwindigkeitsprofil gemäß der Kontinuitätsgleichung, und die Strömung richtet sich radial aus. Im Auslauf stellt sich bereits kurz nach Verlassen des Diffusors wieder das Geschwindigkeitsprofil einer Poiseuille-Strömung ein.

Der im Diffusor erzielte Druckanstieg aufgrund von Energieumwandlungsprozessen ist sehr gering. In der Isobarendarstellung (Bild 5.11b) ist dieser nur durch den großen Abstand der Linien gleichen Druckes in diesem Bereich festzustellen. Im Auslauf zeigt der Druck wieder das für eine Poiseuille-Strömung typische Verhalten mit gleichmäßigem Abfall in und konstantem Verlauf quer zur Strömungsrichtung.



a)



b)

Linien konstanten Druckes: $\Delta p = 2,302 \cdot 10^{-4} \text{ N/m}^2$	
1	p_{bez}
2	$p_{\text{bez}} + \Delta p$
3	$p_{\text{bez}} + 2 \cdot \Delta p$
4	$p_{\text{bez}} + 3 \cdot \Delta p$
5	$p_{\text{bez}} + 4 \cdot \Delta p$
6	$p_{\text{bez}} + 5 \cdot \Delta p$
7	$p_{\text{bez}} + 6 \cdot \Delta p$
8	$p_{\text{bez}} + 7 \cdot \Delta p$
9	$p_{\text{bez}} + 8 \cdot \Delta p$
10	$p_{\text{bez}} + 9 \cdot \Delta p$
11	$p_{\text{bez}} + 10 \cdot \Delta p$
12	$p_{\text{bez}} + 11 \cdot \Delta p$

Übertrieben dargestellte Geschwindigkeitsverteilung im divergierenden Kanalabschnitt

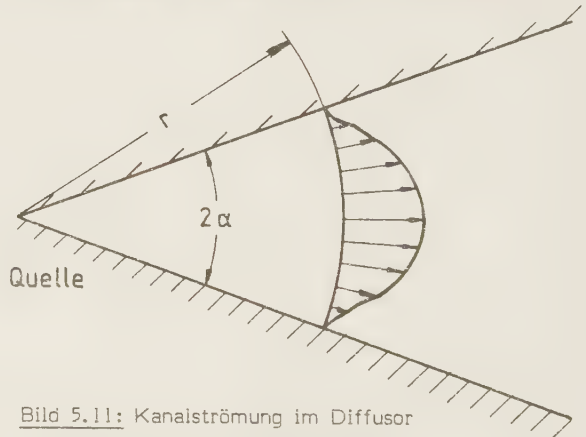


Bild 5.11: Kanaiströmung im Diffusor

a) Geschwindigkeitsvektoren

b) Isobaren

5.3 Die vollausgebildete turbulente Spaltströmung

Da die Navier-Stokes-Gleichungen und die Kontinuitätsgleichung für eine turbulente Strömung auch für einfache Strömungsfälle nicht mehr auf analytischem Wege gelöst werden können, ist man für die Überprüfung des physikalischen Modells auf experimentelle Untersuchungen angewiesen.

Die vollausgebildete, turbulente, ebene Spaltströmung stellt eine der einfachsten turbulenten Strömungsformen dar. El Telbany und Reynolds [56] untersuchten diese Strömung ausführlich und gaben Profile der zeitlich gemittelten Geschwindigkeit über der Spalthöhe an.

Um ein vollausgebildetes, turbulentes Geschwindigkeitsprofil zu erhalten, wurde zunächst am Eintritt in das Rechengebiet ein sogenanntes "Propfenprofil" mit einer über der Spalthöhe konstanten Geschwindigkeit vorgegeben. Eine mit dieser Randbedingung durchgeführte Rechnung ergab eine der Reynolds-Zahl entsprechende Profilumbildung auf stromabwärts liegenden Querströmungsebenen. Nach Konvergenz des Rechenverfahrens wurde das sich am Austritt des Rechengebietes einstellende Profil als Randbedingung am Eintritt des Spaltes gesetzt und eine erneute Rechnung durchgeführt. Das Ergebnis einer mehrfachen Wiederholung ist schließlich ein vollausgebildetes, turbulentes Geschwindigkeitsprofil der ebenen Spaltströmung.

Bild 5.12 zeigt für eine Reynolds-Zahl von $Re = 105\,000$, das sich bei diesen Rechnungen ergebende vollausgebildete auf den Maximalwert in Kanalmitte bezogene Geschwindigkeitsprofil (Kurve 1). Die Reynolds-Zahl ist gemäß

$$Re = \frac{\bar{u} d_h}{\nu}$$

mit der kontinuieritätsgemittelten Geschwindigkeit $\bar{u}$ und dem hydraulischen Durchmesser $d_h = 4 A/U$ definiert.

Die instationären Schwankungsbewegungen bewirken einen Impulsaustausch zwischen benachbarten Fluidschichten und transportieren auf diese Weise Impuls vom Inneren der Strömung zur Kanalwand. Hierdurch entsteht ein Geschwindigkeitsprofil mit einem relativ gleichmäßigen Bereich in Spaltmitte und entsprechend steilem Geschwindigkeitsgradienten an den Wänden. Zum Vergleich ist einerseits der gemessene Geschwindigkeitsverlauf der ebenen Spaltströmung (Kurve 2) [56], und andererseits das Geschwindigkeitspro-

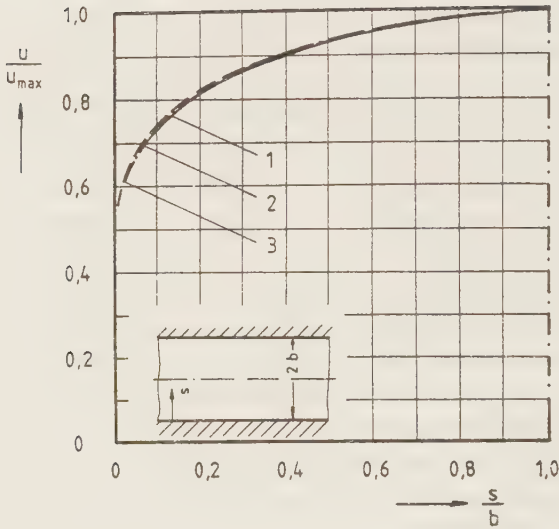


Bild 5.12: Geschwindigkeitsverteilung der vollausgebildeten, turbulenten Spaltströmung

- 1: numerisch ermitteltes Geschwindigkeitsprofil
- 2: gemessener Geschwindigkeitsverlauf [56]
- 3: gemessenes Geschwindigkeitsprofil durch ein Rohr [24]

fil einer turbulenten Strömung durch ein Rohr mit kreisförmigem Querschnitt (Kurve 3) [z. B. 24] bei entsprechender Reynolds-Zahl eingezeichnet. Dieser Geschwindigkeitsverlauf wird durch die Rechnung gut wiedergegeben.

Ein weiteres Kriterium für die Qualität des verwendeten Turbulenzmodells stellt der sich je Längeneinheit einstellende Druckverlust $\Delta p/\Delta l$ dar. Für die zugehörige dimensionslose Spaltreibungszahl λ gilt:

$$\lambda = \frac{\Delta p}{\Delta l} \cdot \frac{d_h}{\rho} \cdot \frac{2}{u^2} \quad (5.10)$$

wobei der hydraulische Durchmesser d_h gleich der zweifachen Spalthöhe $2b$ ist. Truckenbrodt [24] gibt eine auf empirischen Untersuchungen basierende Berechnungsvorschrift für die Spaltreibungszahl λ an:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,0 \lg (\operatorname{Re} \sqrt{\lambda}) - 1,0 \quad (5.11)$$

In Bild 5.13 ist die durch Gleichung (5.11) implizit gegebene Spaltreibungszahl λ als Funktion der Reynolds-Zahl in doppelt-logarithmischem Maßstab aufgetragen. Die nach Gleichung (5.10) ermittelten Spaltreibungszahlen der numerischen Untersuchungen ergeben eine befriedigende Übereinstimmung mit den Werten der halbempirischen Beziehung (5.11).

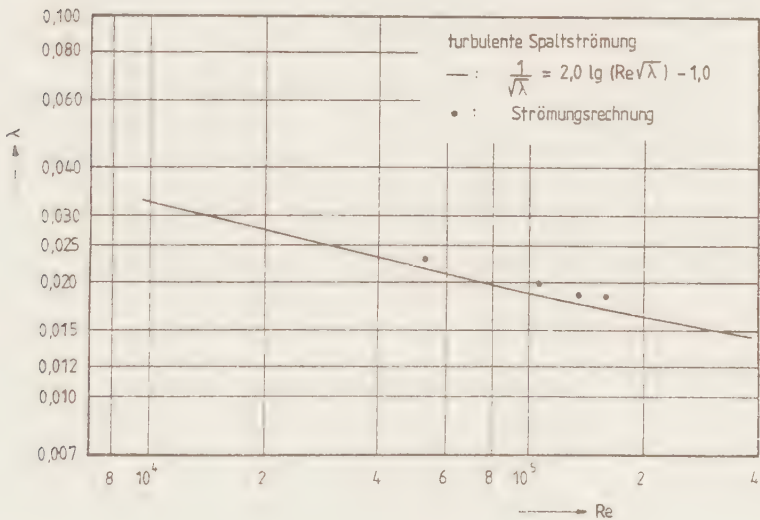


Bild 5.13: Spaltreibungszahl λ der vollausgebildeten, turbulenten Spaltströmung

5.4 Die vollausgebildete turbulente Kanalströmung

Abschließend erfolgte zur Überprüfung des verwendeten Rechenverfahrens die Untersuchung der vollausgebildeten, turbulenten, dreidimensionalen Strömung in einem Rohr mit gleichbleibendem, quadratischem Querschnitt.

Ähnlich wie bei der turbulenten Spaltströmung wurde das ausgebildete turbulente Geschwindigkeitsprofil durch wiederholtes Durchlaufen des Rechengebietes erzeugt.

Besonderes Interesse galt bei dieser Untersuchung der durch Gleichung (5. 10) definierten Rohrreibungszahl λ . Der hydraulische Durchmesser d_h ist für ein Rohr mit quadratischem Querschnitt gleich der Kantenlänge a . Für die turbulente Strömung gibt Truckenbrodt [24] die halbempirische Beziehung

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,0 \lg (\text{Re} \sqrt{\lambda}) - 0,8 \quad (5. 12)$$

an, die die Rohrreibungszahl λ nur implizit enthält.

Der in Bild 5.14 dargestellte Vergleich zwischen der nach Gleichung (5. 12) berechneten Rohrreibungszahl und dem Ergebnis des numerischen Verfahrens zeigt ebenfalls eine befriedigende Übereinstimmung.

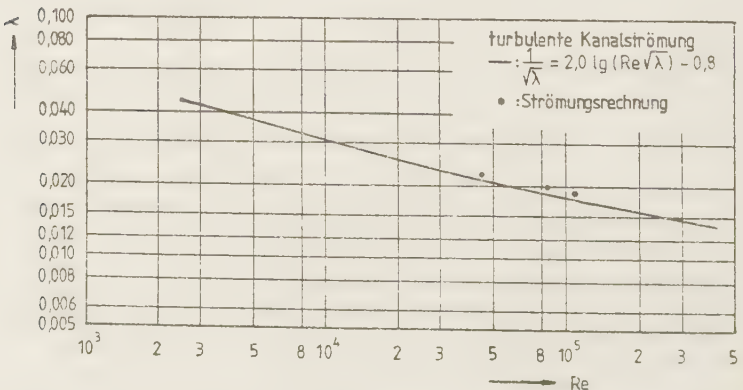


Bild 5.14: Rohrreibungszahl λ der vollausgebildeten, turbulenten Rohrströmung

6. Anwendung des Rechenverfahrens auf praktisch relevante Beispiele

In diesem Abschnitt werden für laminare und turbulente dreidimensionale Strömungen die berechneten Ergebnisse vorgestellt und mit experimentellen Daten verglichen.

Zunächst wird die laminare Strömung in einer 90° -Umlenkung mit gleichbleibendem quadratischem Querschnitt berechnet. Anschließend erfolgt die Nachrechnung der turbulenten Leitradströmung eines hydrodynamischen Wandlers. Bei beiden hier ausgewählten Beispielen werden abschließend die berechneten Totaldruckverluste bestimmt und mit empirischen Daten verglichen.

6.1 Nachrechnung einer laminaren Strömung in einer 90° -Umlenkung mit gleichbleibendem quadratischem Querschnitt

Am Beispiel der laminaren Strömung in einem um 90° umlenkenden Kanal mit gleichbleibendem quadratischem Querschnitt soll die Fähigkeit des Rechenmodells untersucht werden, hierbei auftretende komplexe Strömungsvorgänge wie Sekundärströmungen und Ablösegebiete korrekt wiederzugeben. Für die Strömung in dieser Geometrie sind von Humphrey, Taylor und Whitelaw [57] durchgeführte, ausführliche experimentelle Untersuchungen verfügbar.

Zahl De dienen, die durch

$$De = Re \sqrt{\frac{d_h}{2 r_m}}$$

definiert ist. Bei den hier vorliegenden Verhältnissen resultiert diese Kennzahl zu

$$De = 368,4$$

wodurch der Versuchskanal schon in die Kategorie der relativ stark gekrümmten Kanäle eingeordnet werden kann [57].

Bei der numerischen Rechnung setzt sich das Maschennetz aus einer Kombination von kartesischen und zylindrischen Koordinaten für die geraden bzw. gekrümmten Bereiche des Umlenkanals zusammen. In Hauptströmungsrichtung wurden 65 Zellen und in einer Querströmungsebene für jede Richtung maximal 22 Zellen angeordnet. Der Abstand der Eintrittsebene zum Beginn des Rohrkrümmers war gleich dem fünffachen hydraulischen Durchmesser; die Austrittsebene des Rechengebietes befand sich 150 mm stromabwärts der Umlenkung. In der Umlenkung betrug das Inkrement des Umfangswinkels zwischen den Querströmungsebenen 3° .

In der Eintrittsebene wurde als Randbedingung das vollentwickelte, laminare Geschwindigkeitsprofil für eine Kanalströmung angenommen. Nach White [55] ergibt sich diese Geschwindigkeitsverteilung als Lösung der Poisson-Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}$$

mit der Haftbedingung auf den Randkurven. Der Druckgradient liegt durch Vorgabe des Volumenstromes $\dot{V}$ fest. Für einen Kanal mit quadratischem Querschnitt gilt [55]:

$$\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} = \frac{12 \cdot \dot{V}}{d_h^3} \left[1 - \frac{192}{\pi^5} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\tanh \frac{n\pi}{2}}{n^5} \right]^{-1}$$

Die sich aus der Poisson-Gleichung ergebende Geschwindigkeitsverteilung in der Eintrittsebene ist in Bild 6.2 dargestellt.

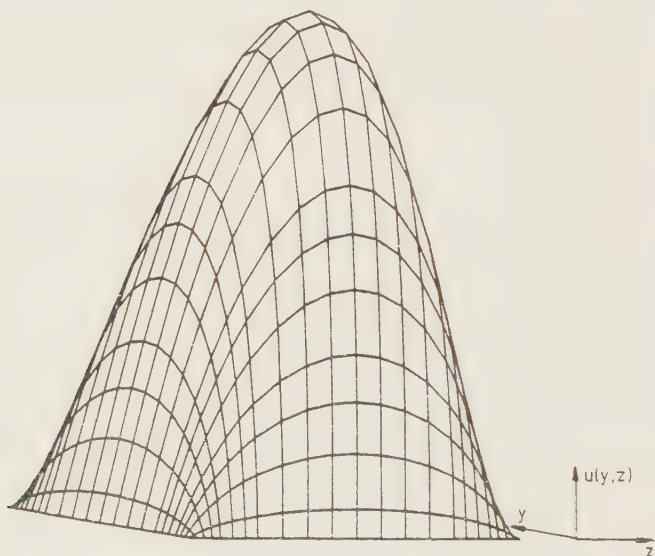


Bild 6.2: Vollausgebildetes, laminares Geschwindigkeitsprofil am Kanaleintritt

Bei der Durchströmung eines gekrümmten Kanals ändern sich sowohl das statische Druckfeld als auch das Geschwindigkeitsfeld. Es bildet sich senkrecht zur Hauptströmungsrichtung ein Druckgradient aus, der die wirkenden Fliehkräfte kompensiert. Am Beispiel eines 90° -Umlenkanals mit gleichbleibendem rechteckigem Querschnitt (Bild 6.3) soll die Bestimmung dieses Druckgradienten erläutert werden. Der Kanal wird von links nach rechts durchströmt und ist in Richtung von $\vec{i}_2$ und $\vec{i}_3$ von festen Wänden umschlossen. Vavra [60] nimmt nun an, daß am Eintritt in den Kanal eine Strömung mit konstantem statischen Druck vorliegt. An den oberen und unteren Wänden bildet sich eine Grenzschicht aus, wie es das eingezeichnete Geschwindigkeitsprofil andeutet.

Ein Fluidteilchen, das mit der Geschwindigkeit v_c in die Umlenkung einströmt, bewegt sich auf einer Bahn mit dem Krümmungsradius r_k . Nimmt man eine reibungsfreie Kernströmung an, ist die Geschwindigkeit entlang der Teilchenbahn konstant. Zur Beschreibung der Fluidbewegung ordnet man ein zylindrisches Koordinatensystem im Krümmungsmittelpunkt P_k der Bahnlinie an. Mit der Annahme verschwindender Geschwindigkeitskomponenten in Richtung von $\vec{i}_2$ und $\vec{i}_3$ sowie konstanter Geschwindigkeit v_c in radialer Richtung ergibt sich für den Druckgradienten:

$$\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p = \vec{i}_2 \frac{v_c^2}{r_k}$$

Es resultiert also aus der angenommenen Geschwindigkeitsverteilung in der Kernströmung ein Druckgradient. Danach herrscht an der Kanalaußenwand ein höherer Druck als an der Innenwand. Der statische Druck in der Grenzschicht ist gleich dem statischen Druck in der Kernströmung; man kann also annehmen, daß entlang einer Linie in Richtung von $\vec{i}_2$ stets derselbe Druckgradient vorliegt.

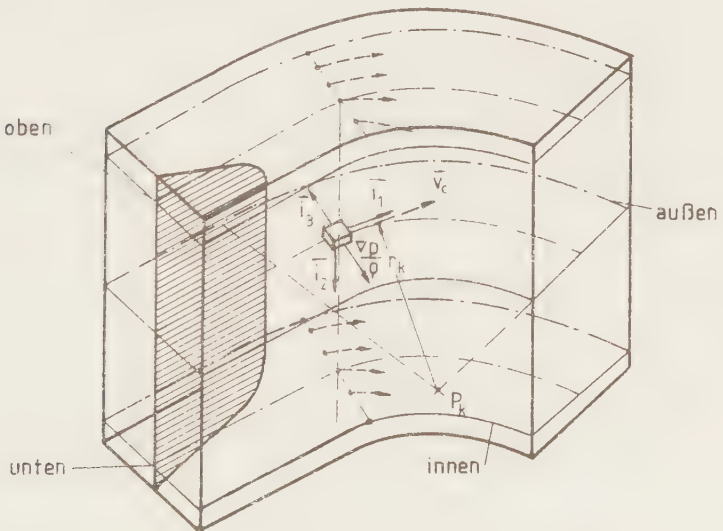


Bild 6.3: Zur Entstehung von Sekundärströmungen in Umlenkanälen [60]

Ein energiearmes in der Nähe der oberen Wand befindliches Fluidteilchen kann aufgrund seiner verminderten Geschwindigkeit v_{ob} auf dem momentanen Krümmungsradius r_{ob} dem Druckgradienten der Primärströmung $\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p$ nicht standhalten. Da das Kräftegleichgewicht aber erfüllt sein muß, wird das Fluidteilchen seine Bewegung auf einer Bahn mit entsprechend verkleinertem Krümmungsradius fortsetzen. Es kommt zu einer die Hauptströmung überlagernde intensiven Sekundärströmung, die sich durch einen Transport energiearmen Fluids von den äußeren Bereichen nach innen äußert. Aus Kontinuitäts- und Symmetriegründen bildet sich im Endzustand ein Doppelwirbel aus, der die Hauptströmung nachhaltig beeinflussen kann. Nach Prandtl [58] ist die Sekundärströmung in den oberen und unteren Randschichten auf den Krümmungsmittelpunkt gerichtet, während sie im Kern nach außen verläuft. Dies bewirkt eine Verlagerung des Geschwindigkeitsmaximums nach außen.

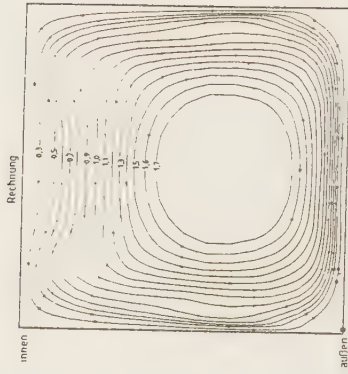
Ergebnisse der numerischen Lösung

Die Ergebnisse der laminaren Strömung durch den beschriebenen Umlenkanal sind in Bild 6.4 dargestellt. Die Auswirkungen der oben beschriebenen Sekundärströmungen auf das Strömungsfeld sind deutlich in den Isotachen der Meridiangeschwindigkeit zu erkennen, die auf die kontinuieritätsgemittelte Geschwindigkeit v_c bezogen worden sind.

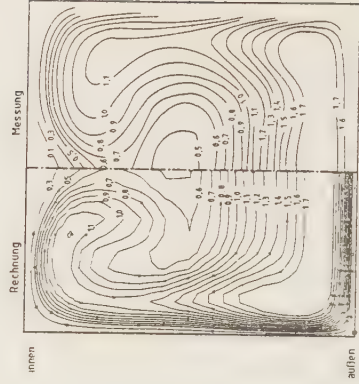
Das Bild 6.4 zeigt in vier Querströmungsebenen die Isotachen der Meridianströmung, wobei für die Umfangswinkel $\vartheta = 0^\circ$ und $\vartheta = 30^\circ$ nur Rechenergebnisse dargestellt sind. Zu erkennen ist, daß sich das zunächst in Kanalmitte liegende Geschwindigkeitsmaximum beim Durchströmen an die Außenkontur verlagert. Dabei wird das Maximum von der Innenseite des Kanals her ständig weiter eingeschnürt. Am Außenrand des Krümmers entsteht so ein Gebiet mit großen Geschwindigkeitsgradienten.

Die für die Querströmungsebenen $\vartheta = 60^\circ$ und $\vartheta = 90^\circ$ gezeichneten Isotachen gemäß Bild 6.4c und Bild 6.4d erlauben einen direkten Vergleich zwischen den Ergebnissen des numerischen Rechenverfahrens (links dargestellt) und Resultaten der experimentellen Untersuchung von Humphrey [57]. Insgesamt zeigt sich eine gute Übereinstimmung zwischen Meß- und Rechenergebnissen.

Zur weiteren Überprüfung der Rechenergebnisse werden die von Humphrey [57] mit Hilfe eines LDA-Verfahrens gemessenen Meridianprofile mit den gerechneten Werten verglichen. Für einen Schnitt in Kanalmitte sind die Meß- und Rechenergebnisse in Bild 6.5 zusammengestellt, während Bild 6.6 den Vergleich zwischen Messung und Rechnung für einen Schnitt auf einem Viertel der Kanalhöhe zeigt.

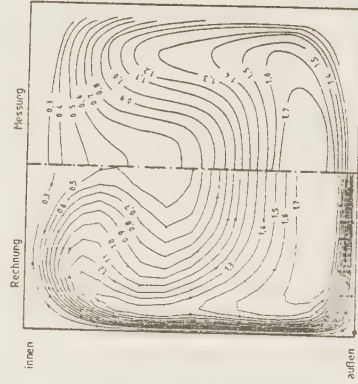


b) $\vartheta = 30^\circ$

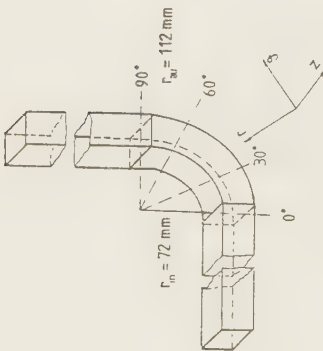


d) $\vartheta = 90^\circ$

a) $\vartheta = 0^\circ$



c) $\vartheta = 60^\circ$

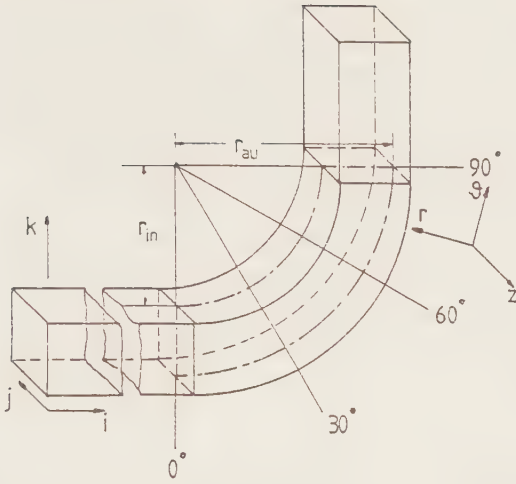


Linien konstanter Meridiangeschwindigkeit	
α	= 0,2000
β	= 0,5000
γ	= 0,6000
δ	= 0,7000
ϵ	= 0,8000
ζ	= 0,9000
η	= 1,0000
θ	= 1,1000
ι	= 1,2000
κ	= 1,3000
λ	= 1,4000
μ	= 1,5000
ν	= 1,6000
ξ	= 1,7000

Bild 6.4: Isotachen der Meridianströmung

(Re = 790)

- a) $\vartheta = 0^\circ$ c) $\vartheta = 60^\circ$
 b) $\vartheta = 30^\circ$ d) $\vartheta = 90^\circ$



- ooo Messung (Humphrey et.al.)
- Rechnung (Humphrey et.al.)
- eigene Rechnung

$$v_c = 0,0198 \text{ m/s}$$

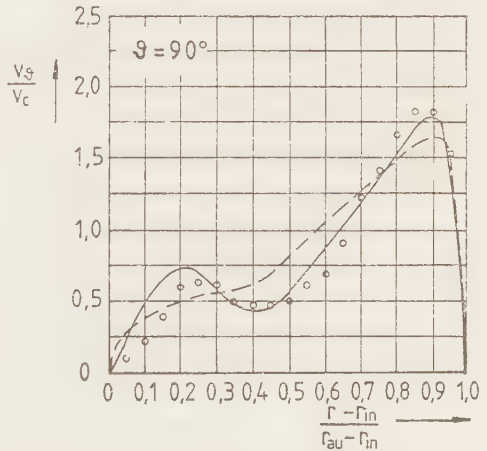
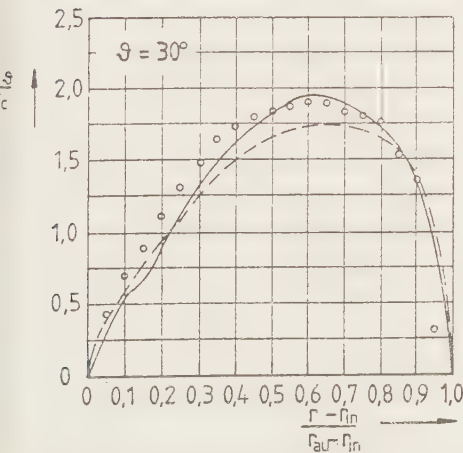
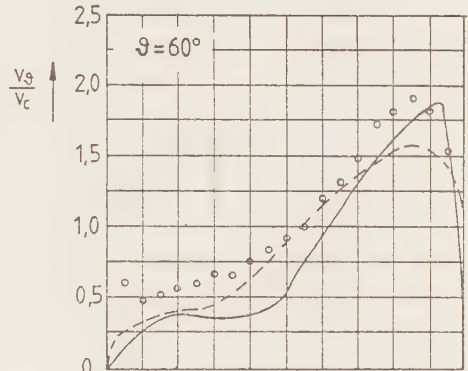
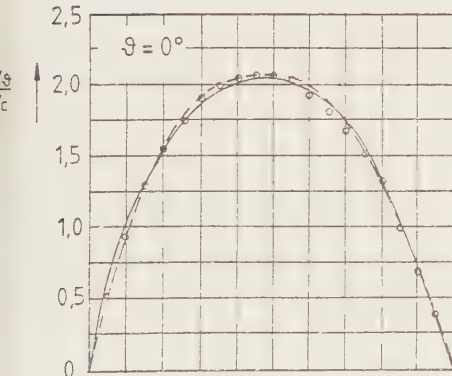
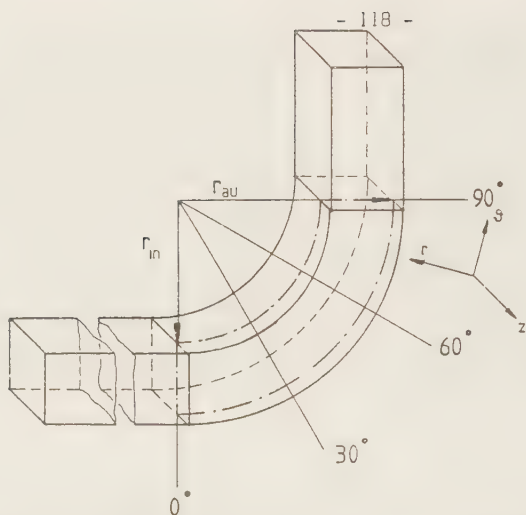


Bild 6.5: Berechnete und gemessene Meridianprofile für einen Schnitt in Kanalmitte
($z = d_H/2$)



ooo Messung (Humphrey et.al.)

--- Rechnung (Humphrey et.al.)

— eigene Rechnung

$$v_c = 0,0198 \text{ m/s}$$

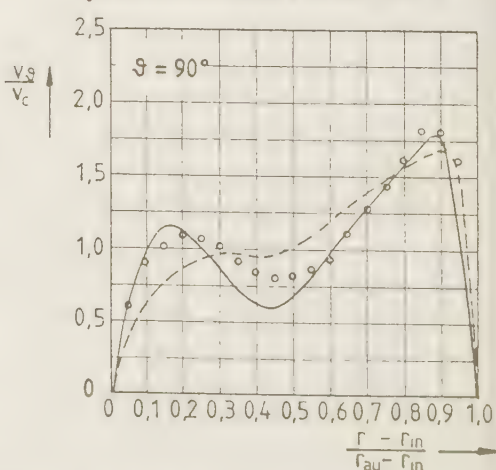
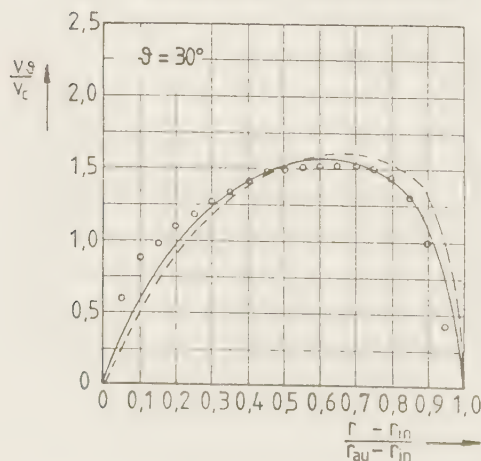
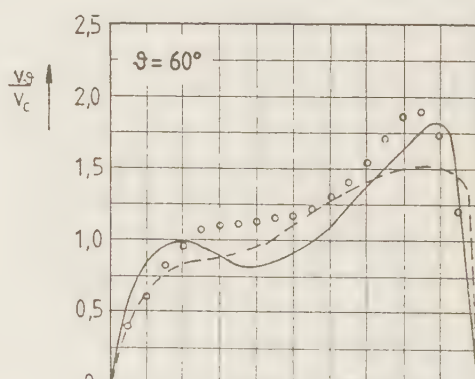
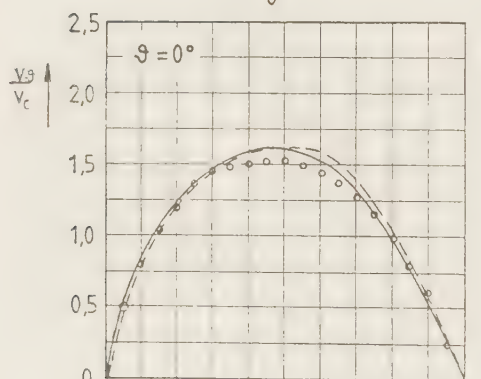


Bild 6.6: Berechnete und gemessene Meridianprofile für einen Schnitt auf einem Viertel der Kanalhöhe ($z = d_h/4$)

Das in Kanalmitte befindliche Geschwindigkeitsmaximum hat sich nach der 90°-Umlenkung für beide Schnittebenen an die Kanalausenseite verlagert, wobei dort ein Bereich mit großen Geschwindigkeitsgradienten entsteht; er ist bereits in der Isotachendarstellung zu erkennen (Bild 6.4).

Für die Querströmungsebene $\vartheta = 0^\circ$ zeigt das Meridianprofil in Kanalmitte nur geringe Abweichungen vom vorgegebenen, vollausgebildeten, laminaren Geschwindigkeitsprofil. An der Kanalausenseite ist infolge des erhöhten Druckes eine leichte Verzögerung in der Ebene $z = d_h/4$ festzustellen (Bild 6.6).

Stromabwärts wirken die auftretenden Sekundärströmungen an der Kanalausenseite ausgleichend auf das Meridiangeschwindigkeitsprofil. Dagegen verzögern die Doppelwirbel im Bereich der Koordinate

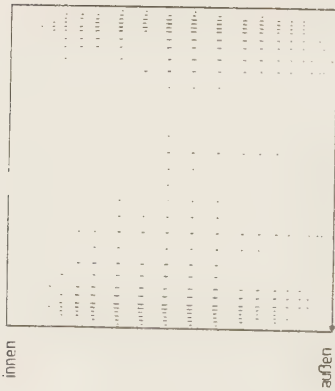
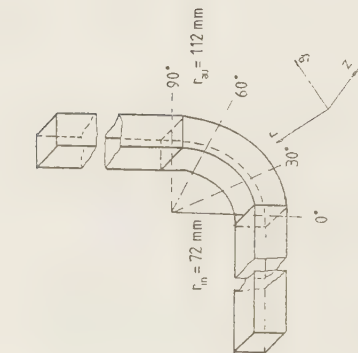
$$0 < \frac{r_{\text{au}} - r_{\text{in}}}{r_{\text{au}} + r_{\text{in}}} < 0,75$$

die Meridiankomponente in Kanalmitte beträchtlich.

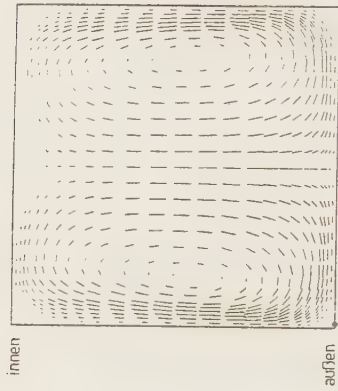
Insgesamt zeigt sich für die Querströmungsebenen $\vartheta = 0^\circ$, $\vartheta = 30^\circ$, und – mit gewissen Abstrichen – auch für $\vartheta = 90^\circ$ eine gute Übereinstimmung zwischen Meß- und Rechenergebnissen. Das Resultat ist für die Ebene $\vartheta = 60^\circ$ in beiden Fällen schlechter. Ein Grund hierfür ist ein noch zu grobes Maschennetz in dieser Region, um die großen Geschwindigkeitsgradienten an der Kanalauswand nachbilden zu können.

Der Vergleich der erhaltenen numerischen Lösung mit den ebenfalls auf einem elliptischen Rechenverfahren basierenden Resultaten von Humphrey [57] zeigt einen Vorteil für das hier verwendete Rechenverfahren, der auf die größere Stützpunktdichte zurückzuführen ist.

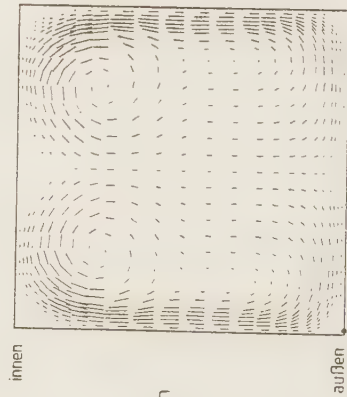
Die Entwicklung der Sekundärströmungen ist in Bild 6.7 dargestellt. Für vier Querströmungsebenen im Bereich der 90°-Umlenkung sind



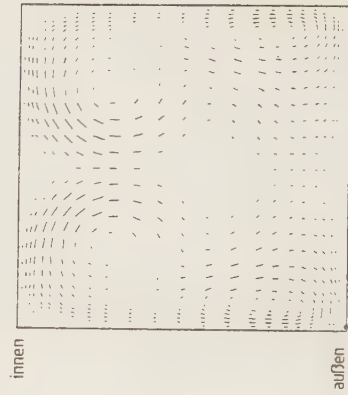
a) $\vartheta = 0^\circ$



b) $\vartheta = 30^\circ$



c) $\vartheta = 60^\circ$



d) $\vartheta = 90^\circ$

Maßstab:

$\longrightarrow \hat{= v_c}$

Bild 6.7: Berechnete Sekundärströmungen
auf vier Querströmungsebenen

a) $\vartheta = 0^\circ$ c) $\vartheta = 60^\circ$

b) $\vartheta = 30^\circ$ d) $\vartheta = 90^\circ$

die berechneten Sekundärströmungen in Form von Geschwindigkeitsvektoren gezeichnet. Die Pfeile repräsentieren Größe und Richtung der jeweils vorhandenen Sekundärgeschwindigkeit. Zu beachten ist, daß bei jedem Bild der gleiche Abbildungsmaßstab gewählt worden ist, um einen Eindruck von den sich in kurzer Zeit vergrößernden Sekundärgeschwindigkeiten zu vermitteln.

Wie die Sekundärgeschwindigkeiten in Bild 6.7 zeigen, ist der charakteristische Doppelwirbel in der Querströmungsebene $\vartheta = 0^\circ$ noch nicht erkennbar, während er stromabwärts - in der Querströmungsebene $\vartheta = 30^\circ$ - schon vollkommen ausgebildet ist. Hier werden die betragsmäßig größten Sekundärgeschwindigkeiten erreicht, die sich mit ungefähr 65 % der kontinuierätsgemittelten Geschwindigkeit v_c in guter Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen von Humphrey [57] befinden. Stromabwärts weisen die Beträge der Sekundärgeschwindigkeiten eine abnehmende Tendenz auf.

Die Darstellungen der Sekundärströmungen in den Ebenen $\vartheta = 60^\circ$ und $\vartheta = 90^\circ$ (Bild 6.7c und 6.7d) belegen eine komplizierte sekundäre Wirbelströmung. Eine anschauliche Erklärung kann wie folgt gegeben werden:

Die intensive Sekundärströmung, die aus der Verkleinerung der Krümmungsradien der Bahnlinien in wandnahen Schichten resultiert, führt zu einem vermehrten Transport langsamen Fluids von außen nach innen. Dieser Fluidtransport ist in Bild 6.8 deutlich im Bereich der Umlenkung an den Geschwindigkeitsvektoren zu erkennen.

Das Gesamtbild dieses Strömungsvorganges gewinnt an Anschaulichkeit durch Einführen der sogenannten Bahnlinien. Nach Truckenbrodt [24] stellt eine Bahnlinie den geometrischen Ort aller Raumpunkte dar, die ein Fluidpartikel während seiner Bewegung nacheinander durchläuft. Die Bestimmung der Bahnlinie geschieht wie folgt:

Als Lösung der Erhaltungsgleichungen liegt neben dem Druckfeld auch das vollständige Geschwindigkeitsfeld vor. Nach Vorgabe eines Startpunktes wird für diesen Punkt die Geschwindigkeit nach Größe

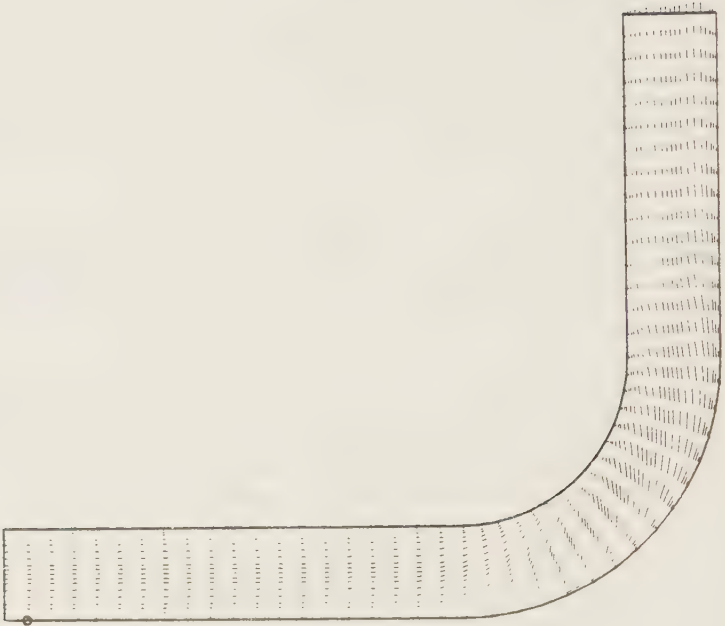


Bild 6.8: Geschwindigkeitsvektoren in einer wandnahen Schicht des
90°-Umlenkkanals (Wandabstand: 2 mm)

und Richtung bestimmt. Mit einem gewählten, fiktiven Zeitschritt δt ergeben sich für das als masselos angesehene Fluidteilchen neue Ortskoordinaten; für die so erhaltene Position wird wiederum der Geschwindigkeitsvektor bestimmt, womit die neue Richtung der Bahnlinie festliegt. Um zu einem Gesamtbild der Strömung zu gelangen, muß diese Vorgehensweise für mehrere Fluidteilchen mit verschiedenen Startpunkten wiederholt werden.

Bild 6.9 zeigt ein auf die oben beschriebene Weise entstandenes Strömungsbild für einen Schnitt 2 mm von der Kanalwand entfernt. Das wandnahe Fluid wandert entsprechend dem Druckgefälle in der Umlenkung von außen nach innen, was sich in einer Verkleinerung der Krümmungsradien der Bahnlinien äußert.

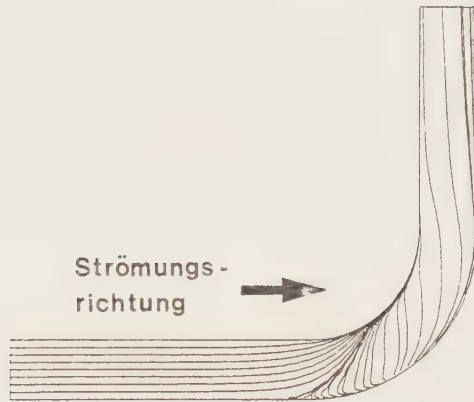


Bild 6.9: Bahnlinien von Fluidteilchen im 90°-Umlenkanal

Aus Kontinuitäts- und Symmetriegründen bildet sich ein entgegengesetzt rotierender Doppelwirbel aus, der das Meridiangeschwindigkeitsprofil nachhaltig beeinflusst. Bild 6.10 zeigt das Geschwindigkeitsprofil der Meridianströmung für die Querströmungsebene $\vartheta = 60^\circ$.

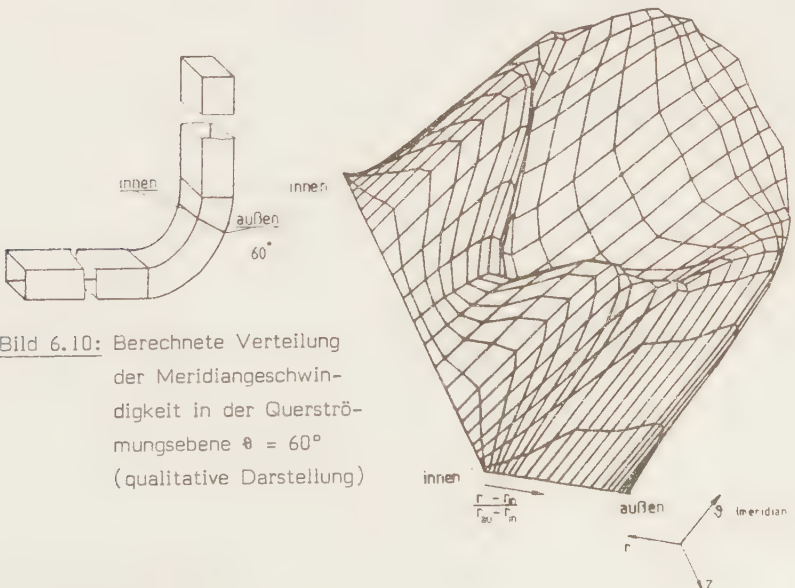


Bild 6.10: Berechnete Verteilung der Meridiangeschwindigkeit in der Querströmungsebene $\vartheta = 60^\circ$ (qualitative Darstellung)

Zu erkennen sind das nach der Kanalaußenwand verlagerte Geschwindigkeitsmaximum und das sich aus Kontinuitätsgründen einstellende Geschwindigkeitsminimum in der Kanalmitte. Langsame Fluidteilchen werden durch den wirkenden Druckgradienten zur Innenseite der Umlenkung transportiert, während die Zentrifugalkräfte den schnelleren Bereich der Strömung zunehmend nach außen verlagern. Es entsteht das in den Bildern 6.7c bzw. 6.7d dargestellte komplizierte Sekundärströmungsbild.

In Übereinstimmung mit den experimentellen Untersuchungen [57] tritt an der Kanalaußenseite ein kleines Rückströmungsgebiet auf, das in der Lösung der numerischen Untersuchung zwischen 0° und 40° aufgezeigt werden konnte. Bild 6.11 zeigt qualitativ das Geschwindigkeitsprofil der Meridianströmung für die Querströmungsebene $\vartheta = 30^\circ$.

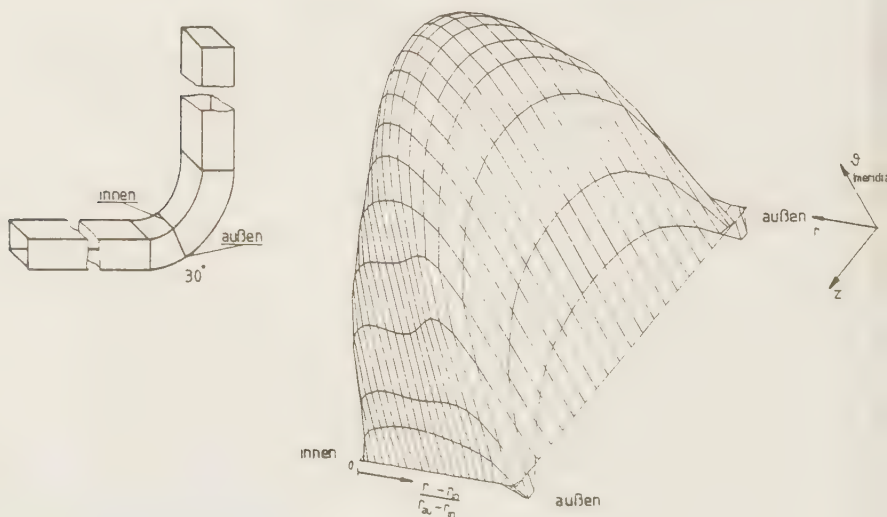


Bild 6.11: Berechnete Verteilung der Meridiangeschwindigkeit in der Querströmungsebene $\vartheta = 30^\circ$. Auftreten eines Ablösungsgebietes (qualitative Darstellung)

Deutlich ist das auf der Druckseite befindliche Ablösungsgebiet zu sehen, das symmetrisch zur mittleren Kanalebene liegt.

Da der Einfluß der Krümmung auf den Druckverlust bei einer Rohrströmung recht genau bekannt ist, wird abschließend ein Vergleich der Widerstandszahlen aus der numerischen Lösung und den experimentellen Untersuchungen durchgeführt.

Widerstandszahlen

Bei dem Strömungsvorgang durch einen Umlenkkanal treten infolge der Sekundärströmungen im Vergleich zu einer geraden Kanalströmung größere Verluste auf. Nach Prandtl [58] oder Gersten [59] ist der Widerstand der laminaren Strömung durch einen 90°-Krümmer gleich dem des geraden Kanals multipliziert mit einer Funktion der Dean-Zahl. Hierfür kann die Näherungsgleichung

$$f(De) = 0,37 De^{0,36}$$

verwendet werden. Der Gültigkeitsbereich umfaßt den Dean-Zahl-Bereich

$$20 < De < 1000$$

Für den vorliegenden Umlenkkanal beträgt die Dean-Zahl

$$De = 368,4$$

so daß für das Verhältnis der Widerstandszahlen des Krümmers ζ_{Kr} und des geraden Kanals ζ_{Ka} der Wert

$$\frac{\zeta_{Kr}}{\zeta_{Ka}} = 3,1051$$

gemäß obiger Näherungsformel resultiert. Die Widerstandszahl für den geraden Kanal ergibt sich z. B. nach Fister [1] zu:

$$\zeta_{Ka} = \frac{1}{d_h} \frac{64}{Re}$$

Mit $l = \frac{\pi r_m}{2} = 144,51 \text{ mm}$, $d_h = 40 \text{ mm}$ und $Re = 790$ ist

$$\zeta_{Ka} = 0,293$$

womit für die Widerstandszahl ζ_{Kr} der 90°-Umlenkung der Wert:

$$\zeta_{Kr} = 0,910$$

folgt.

Für eine Auswertung der numerischen Ergebnisse benutzt man eine Widerstandszahl ζ_{Kr} :

$$\zeta_{Kr} = \frac{\bar{p}_{tE} - \bar{p}_{tA}}{\frac{\rho}{2} v_{cE}^2}$$

Hierbei wird der durch dissipative Vorgänge entstehende Druckverlust auf den Staudruck der kontinuierlich gemittelten Geschwindigkeit am Kanaleintritt bezogen:

$$v_{cE} = \frac{1}{A_E} \int_{A_E} v_m dA$$

Zur Bilanzierung der Energieströme gewichtet man bei der Mittelung der Totaldrücke mit der örtlichen Meridiangeschwindigkeit v_m [8]:

$$\bar{p}_t = \frac{1}{A \cdot v_c} \int_A p_t v_m dA$$

Für das betrachtete Beispiel ergibt sich als Zahlenwert der Widerstandszahl ζ_{Kr} :

$$\zeta_{Kr} = 0,939$$

womit auch für die Widerstandszahlen eine gute Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen der Lösung des numerischen Rechenverfahrens und halbempirischen, überschlägigen Berechnungsgleichungen vorliegt.

6.2 Nachrechnung der experimentellen Untersuchungen der Leitradströmung eines hydrodynamischen Wandlers

Mit diesem Rechenverfahren können Strömungen in Gebieten beliebiger geometrischer Gestalt berechnet werden, obwohl die problembeschreibenden Gleichungen in einem kartesischen Koordinatensystem formuliert worden sind. Nachdem im Abschnitt 6.1 das Rechenggebiet aus einem orthogonalen Maschennetz bestand, wird jetzt die Bedingung der Orthogonalität aufgegeben. Als Beispiel für die Fähigkeit des Rechenverfahrens, auch in krummlinigen, konturangepaßten Maschennetzen die Lösung der Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls zu berechnen, werden Ergebnisse für die Leitradströmung eines hydrodynamischen Wandlers vorgestellt.

Die für den Vergleich notwendigen, experimentell ermittelten Strömungsdaten im Leitrad des mit Wasser gefüllten Wandlers (Bild 6.12) sind im wesentlichen Strömungsgeschwindigkeiten, Strömungsrichtungen und Gesamtdrucke. Bei der Messung dieser Feldgrößen wurden sowohl konventionelle Sondenmeßverfahren wie Mehrlochdrucksonden, als auch moderne Geschwindigkeitsmeßverfahren wie das Laser-Zwei-Fokus-Verfahren eingesetzt [12].

Im Gehäuse eingelassene Sichtfenster erlauben dem Laserstrahl, die gewünschten Meßquerschnitte abzutasten und auf diese Art die ungestörte Strömung zu erfassen, da das Meßvolumen nur optisch abgegrenzt wird. Mit dem hier verwendeten Laser-Zwei-Fokus-Verfahren (L2F-Verfahren) ist es möglich, die Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zur optischen Achse der Laserstrahlen zu messen. Für die Leitradströmung können, da die optische Achse der Laserstrahlen parallel zur Maschinenachse (Axialrichtung) ausgerichtet ist, demnach nur Geschwindigkeitskomponenten in Radial- und in Umfangsrichtung bestimmt werden.

Die gemessenen Geschwindigkeitskomponenten in der Eintrittsebene

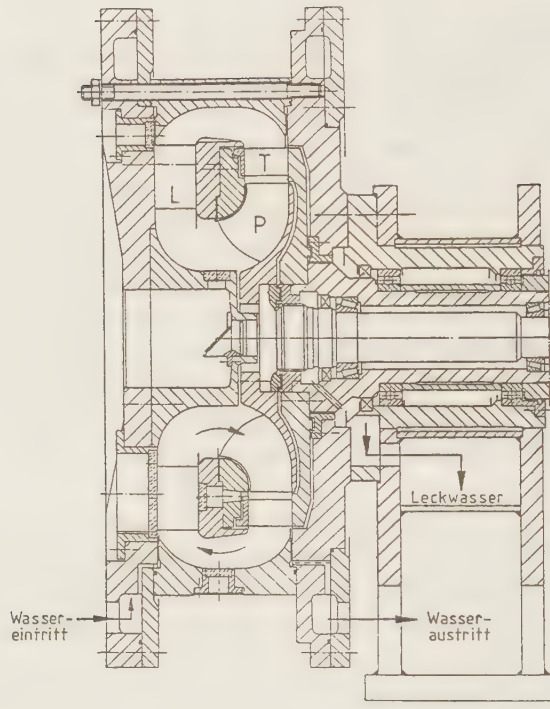


Bild 6.12: Der hydrodynamische Wandler

L: Leitrad, T: Turbine, P: Pumpe

des Leitradkanals dienen als Randbedingungen für das Rechenverfahren; die Komponenten des Strömungsvektors müssen daher vollständig bekannt sein, und es muß die fehlende Komponente in axialer Richtung z. B. mit Hilfe von Mehrlochsonden ermittelt werden. Zur Überprüfung der Ergebnisse des numerischen Verfahrens im Leitradkanal selbst reicht dagegen die Kenntnis der Komponenten des Strömungsvektors in Radial- und Umfangsrichtung aus.

Eine ausführliche Beschreibung des Versuchsstandes und der verwendeten Meßtechnik stellt Adrian in [12] dar, so daß an dieser Stelle darauf verzichtet wird.

6.2.1 Darstellung von Rechen- und Meßergebnissen

Mit dem beschriebenen numerischen Lösungsverfahren wurden Rechnungen für die in Tabelle 6.1 zusammengefaßten Strömungsfälle im Leitrad eines hydrodynamischen Wandlers durchgeführt. Zur Überprüfung der Rechenergebnisse erfolgt der Vergleich der berechneten Werte mit experimentell ermittelten Geschwindigkeitsverteilungen.

Bei der Strömungsuntersuchung im Fall 1 wurde - im Gegensatz zu Adrian, der ein Pumpenrad mit 13 Schaufeln verwendete - ein Pumpenrad mit 16 Schaufeln eingesetzt. Die experimentelle Erfassung der Strömungsdaten erfolgte in einem reduzierten Kreislauf ohne Turbinenrad. Durch das neue Pumpenrad und Weglassen des Turbinenrades ergeben sich mit der vorhandenen Rechnerkapazität erfaßbare Rechengebiete, die eine Nachrechnung des gesamten reduzierten Kreislaufes ermöglichen. Allerdings ist diese numerische Untersuchung nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

Bei den Strömungsuntersuchungen der Fälle 2 bis 5 wurde von Adrian der vollständige Strömungskreislauf, bestehend aus:

- Pumpenrad,
- Turbinenrad,
- der oberen 180°-Umlenkung,
- Leitrad,
- der unteren 90°-Umlenkung

vermessen.

Die unterschiedlichen Betriebspunkte

$$v_2 = 0,70$$

$$v_3 = 0,55$$

$$v_4 = 0,40$$

$$v_5 = 0,00$$

Fall Nr.	Schaufelzahl	v	geometrische Verhältnisse der Strömung am Leitradeintritt	Bemerkungen
1 3-D	16	—		Rückenstoß $\delta\varphi \approx -60^\circ$
2 2-D/3-D	13	0,70		Rückenstoß $\delta\varphi \approx -20^\circ$
3 2-D/3-D	13	0,55		optimale Anströmung $\delta\varphi \approx 0^\circ$
4 2-D/3-D	13	0,40		Bruststoß $\delta\varphi \approx +20^\circ$
5 2-D	13	0,00		Bruststoß $\delta\varphi \approx +54^\circ$

Tabelle 6.1: Übersicht über die berechneten Strömungsfälle

wurden durch Abbremsen des Turbinenrades mit einer Wirbelstrombremse und im Fall 5 zusätzlich mit einer Scheibenbremse eingestellt. Für den sogenannten Festbremspunkt bzw. Anfahrpunkt $v_5 = 0,00$ konnten aufgrund der im Leitradkanal auftretenden Ablösezone keine L2F-Messungen durchgeführt werden. Die sich für diesen Betriebspunkt einstellende Leitradströmung wurde in der Arbeit von Adrian [12] mit Hilfe des Funkenblitzverfahrens sichtbar gemacht. Da die Anwendung des Funkenblitzverfahrens elektrisch nichtleitende und durchsichtige Materialien voraussetzt, wurde ein geometrisch identischer, aerodynamischer Wandler weitgehend aus durchsichtigem Kunststoff gefertigt. Wie die experimentellen Ergebnisse von Adrian [12] zeigen, sind die Strömungszustände im hydrodynamischen Wandler und in dem mit Luft betriebenen aerodynamischen Wandler vergleichbar.

Für die Betriebspunkte

$$v_2 = 0,70$$

$$v_3 = 0,55$$

$$v_4 = 0,40$$

wurden sowohl dreidimensionale als auch ebene numerische Strömungsuntersuchungen durchgeführt. Als Rechenebene der zweidimensionalen Lösung wurde eine Fläche bei halber Schaufelhöhe gewählt. Die numerischen Lösungen der dreidimensionalen Strömung zeigen eine annähernd ebene Strömung im Leitrad infolge der geringen Schaufelhöhe. Die zweidimensionalen Rechnungen gestatten eine wesentlich feinere Strukturierung des Rechengebietes wegen ihres beträchtlich geringeren Bedarfs an Rechnerkapazität. Durch diese ebenen Rechnungen erhält man z. B. Hinweise auf Bereiche im Lösungsgebiet, in denen bei dreidimensionalen Rechenläufen besonders sorgfältig im Hinblick auf die Gittererzeugung gearbeitet werden muß, um die beschränkten Rechnerressourcen möglichst gut zu nutzen.

Für den Anfahrpunkt

$$v_5 = 0,00$$

wurde nur eine zweidimensionale numerische Strömungsuntersuchung durchgeführt. Die gewählte Rechenebene war eine Fläche bei halber

Schaufelhöhe. In dieser Ebene liegen experimentelle Ergebnisse von Funkenblitzuntersuchungen von Adrian [12] vor.

Die punktförmige Messung der Geschwindigkeitskomponenten in radialer Richtung und in Umfangsrichtung erfolgt mit dem L2F-Verfahren auf fünf Meßflächen, deren geometrischer Ort in Bild 6.13 dargestellt ist.

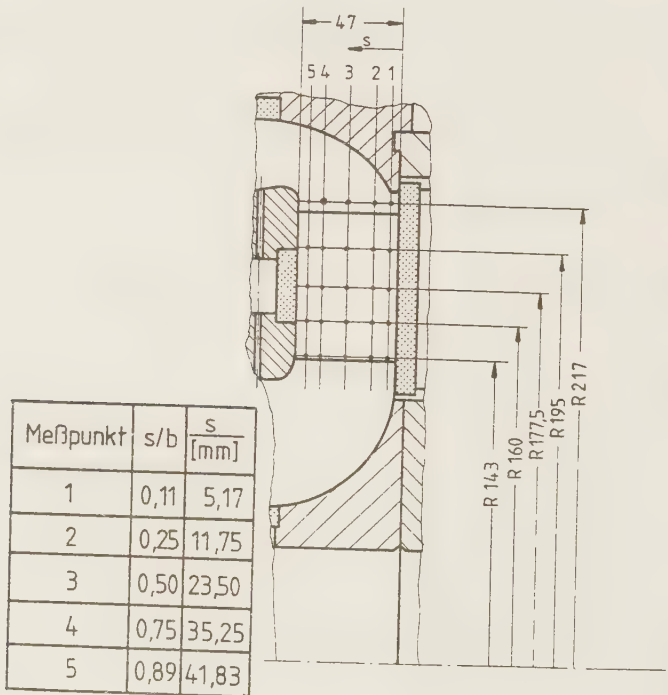


Bild 6.13: Lage der Meßpunkte über der Schaufelhöhe im Leitrad des hydrodynamischen Wandlers

Über der Schaufelhöhe s wurden jeweils fünf Meßpunkte angeordnet. Die Lage der Meßpunkte in Umfangsrichtung zeigt die in Bild 6.14 gezeichnete axiale Ansicht des Leitradkanals, wobei die Anzahl der

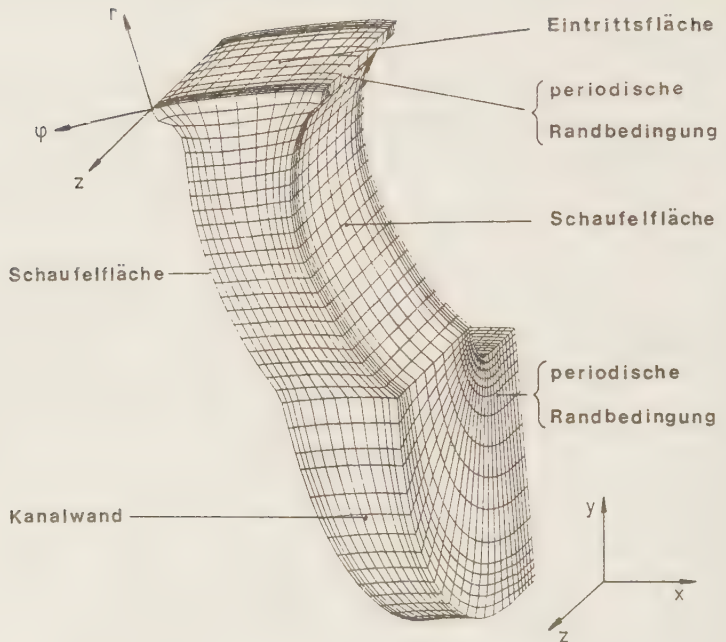


Bild 6.15: Verwendetes dreidimensionales Maschennetz

Randbedingungen

In allen betrachteten dreidimensionalen Strömungsfällen werden in der Eintrittsebene die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors

- u in x -Richtung,
- v in y -Richtung,
- w in z -Richtung

durch bilineare Interpolation aus den experimentell ermittelten Daten bestimmt. Auf den Schaufeloberflächen gilt die Haftbedingung. In den schaufelfreien Bereichen des Rechengebietes wird angenommen, daß sich die Strömung periodisch von Teilung zu Teilung wiederholt, so daß sogenannte Periodizitätsbedingungen in Umfangsrichtung einge-

führt werden. Die experimentellen Ergebnisse von Adrian [12] bestätigen die Zulässigkeit dieser Annahme.

Am Austritt des Rechengebietes geht man von der Annahme aus, daß sich die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors in axialer Richtung nicht mehr verändern.

Bei den zweidimensionalen Strömungsfällen werden in der Eintrittsebene die Vorgabewerte der Geschwindigkeit durch lineare Interpolation bestimmt, während die übrigen Randbedingungen entsprechend dem dreidimensionalen Fall Verwendung finden.

6.2.2 Vergleich von Rechen- und Meßergebnissen

6.2.2.1 Die Leitradströmung im reduzierten Wandlerkreislauf (Fall 1)

Im reduzierten Wandlerkreislauf ohne Turbinenrad stellt sich ein umlaufender Volumenstrom von

$$\dot{V} = 0,265 \text{ m}^3/\text{s}$$

ein. Die mittlere Geschwindigkeit in der Eintrittsebene ergibt sich damit zu

$$\bar{c}_r = 4,14 \text{ m/s}$$

Bild 6.16 verdeutlicht das Verhalten der Strömung im Leitradkanal. Es zeigt die experimentell bestimmten Geschwindigkeitsvektoren in fünf Meßflächen A_{L1} (R217), A_{LK1} (R195), A_{LK2} (R177,5), A_{LK3} (R160) und A_{L2} (R143). Die Geschwindigkeitsvektoren sind jeweils für 11 %, 25 %, 50 %, 75 % und 89 % der Schaufelhöhe gezeichnet. Infolge des fehlenden Turbinenrades kommt es zu einer Fehlanströmung des Leitrades, die man als "Rückenstoß" bezeichnet. Diese Fehlanströmung führt hier zu einem Ablösegebiet auf der konkaven Schaufelseite. Die relativ große Axialgeschwindigkeitskomponente in der Eintrittsebene A_{L1} bewirkt, daß das Ablösegebiet in der Nähe des Innenkerns ($s/b \rightarrow 1$) auftritt. Die Strömung richtet sich in der Ebene A_{LK1} schon radial aus und paßt sich an die Schaufelgeometrie an, wie in der Ebene A_{LK2} deutlich zu sehen ist. Das Geschwindigkeitsmaximum tritt auf der konvexen Schaufelseite in der Nähe des Innenkerns auf. Im weiteren Kanalverlauf entsteht ein geordnetes Strömungsbild mit einer weitgehend gleichmäßigen Geschwindigkeitsverteilung für eine Querströmungsebene (Ebene A_{L2}).

Die Ergebnisse der numerischen Untersuchung zeigen qualitativ gute Übereinstimmung mit den experimentell ermittelten Geschwindigkeitsvektoren (Bild 6.17).

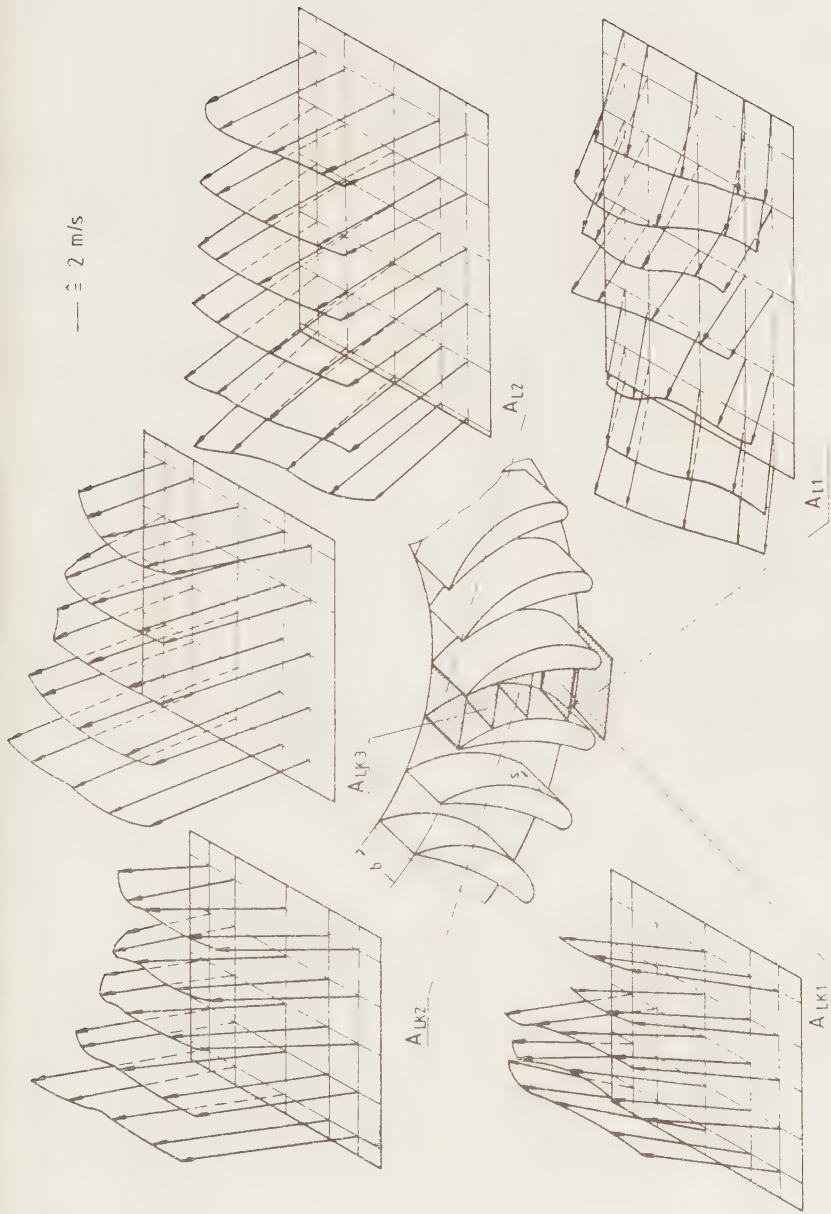


Bild 6.16: Mit dem L2F-Verfahren gemessene Geschwindigkeitsvektoren im Leitradkanal (reduzierter Wandlerkreislauf, Fall Nr. 1)

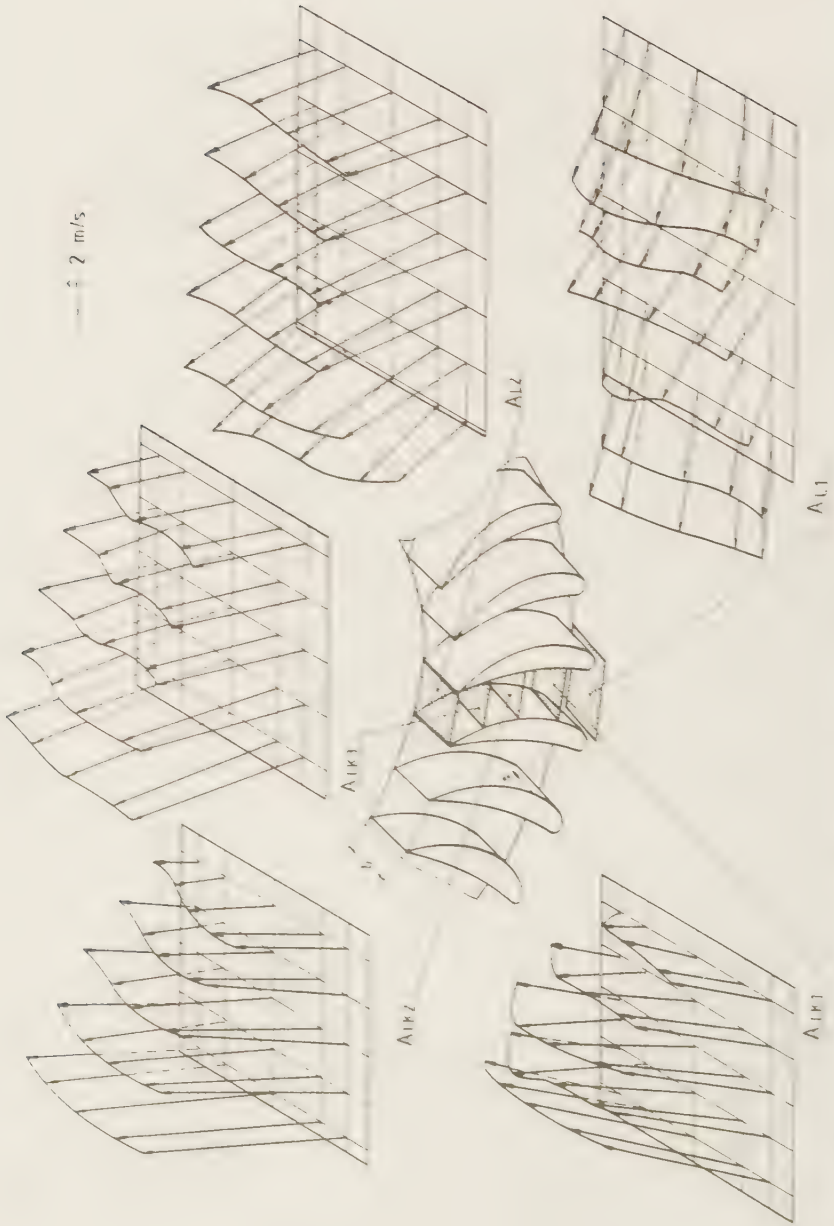


Bild 6.17: Mit dem Rechenverfahren ermittelte Geschwindigkeitsvektoren (induzierter Wandlänglauf, Fall Nr. 1)

In der Querströmungsebene A_{LK1} ist deutlich das sich experimentell andeutende Ablösegebiet auf der konkaven Schaufelseite in der Nähe des Innenkerns ($s/b \rightarrow 1$) zu erkennen. Die Strömung richtet sich radial aus (Ebene A_{LK1} , A_{LK2}) und paßt sich im weiteren Verlauf der Kanalgeometrie an (Ebene A_{LK3} , A_{L2}). Allerdings zeigen sich die Auswirkungen des berechneten Ablösegebietes stromabwärts über eine längere Strecke als in der Messung, was auf das relativ einfache Turbulenzmodell zurückzuführen ist. In der Austrittsebene bestimmt das Rechenmodell - in Übereinstimmung mit den experimentellen Daten - das Geschwindigkeitsmaximum auf der konvexen Schaufelseite in der Nähe des Innenkerns.

Einen quantitativen Vergleich zwischen experimentell bestimmten und vorausgerechneten Geschwindigkeiten zeigen die Bilder 6.18a - e. Die Geschwindigkeitskomponenten in Radial- und Umfangsrichtung - c_r und c_ϕ - werden für die Ebenen R195, R177,5, R160 und R143 und für 11%, 25%, 50%, 75% und 89% der Schaufelhöhe gezeichnet. Die Meßergebnisse sind durch unterbrochene, die Rechenergebnisse durch Volllinien dargestellt.

Für die Radialkomponente der Geschwindigkeit werden die qualitativen Verläufe des Strömungsfeldes gut wiedergegeben, während die quantitative Übereinstimmung zwischen Meß- und Rechenergebnissen befriedigend ist. Die Verlagerung des Geschwindigkeitsmaximums ist für die Ebenen $s/b = 0,11$, $s/b = 0,25$ und $s/b = 0,50$ von der Saugseite der Leitradschaufeln in Kanalmitte unter gleichzeitiger gegenseitiger Angleichung des Geschwindigkeitsprofils deutlich zu erkennen.

Für die dargestellten Ebenen in der Nähe des Innenkerns ($s/b = 0,75$ und $s/b = 0,89$) bestimmt die Rechnung in Übereinstimmung mit dem Experiment das Geschwindigkeitsmaximum auf der Schaufelsaugseite. In diesem Bereich weist das Radialprofil eine positive Steigung auf. Das Ablösegebiet selbst ist für die Ebene R195 in der Nähe des Innenkerns gut zu erkennen (Bild 6.18e). Die Ergebnisse der numerischen Strömungsuntersuchungen zeigen eindeutig größere Auswirkungen des Ablösegebietes auf das gesamte Strömungsbild als experi-

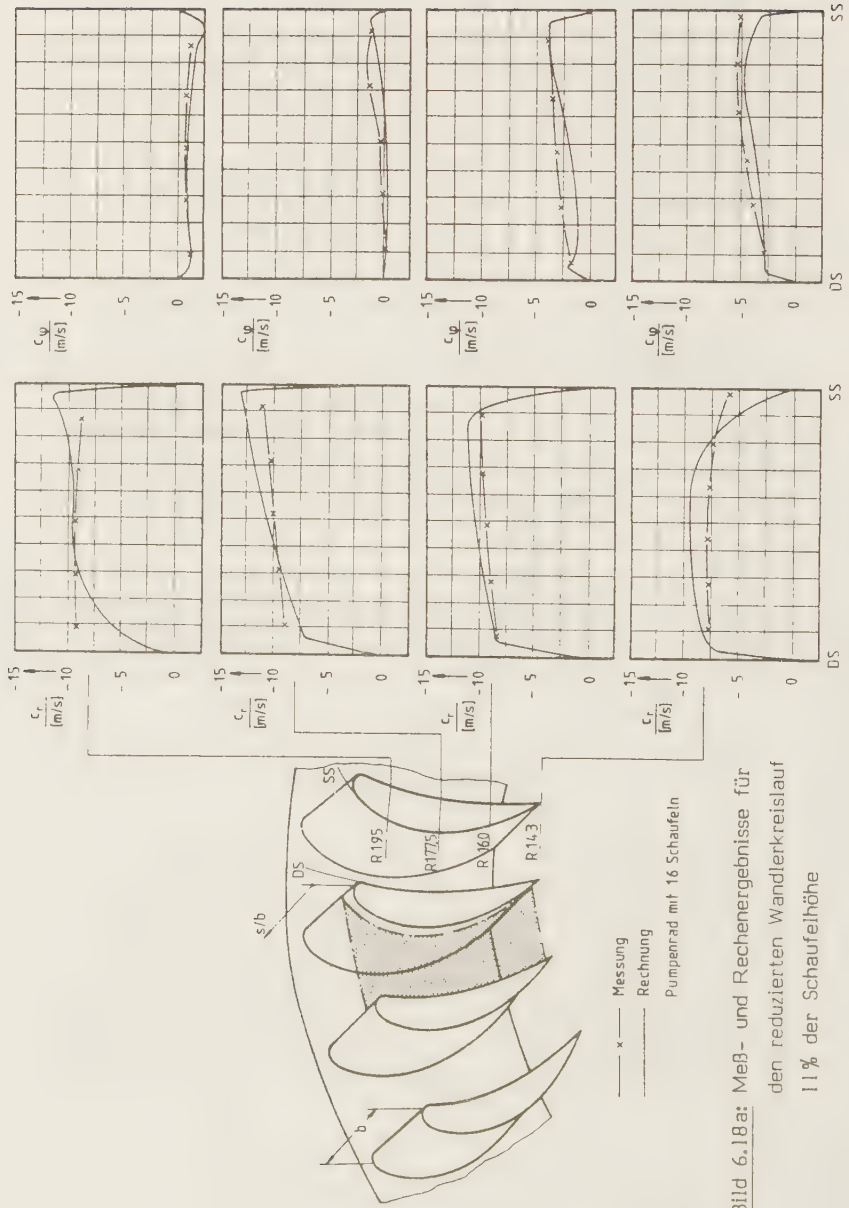


Bild 6.18a: Meß- und Rechenergebnisse für den reduzierten Wandlerkreislauf 11% der Schaufelhöhe

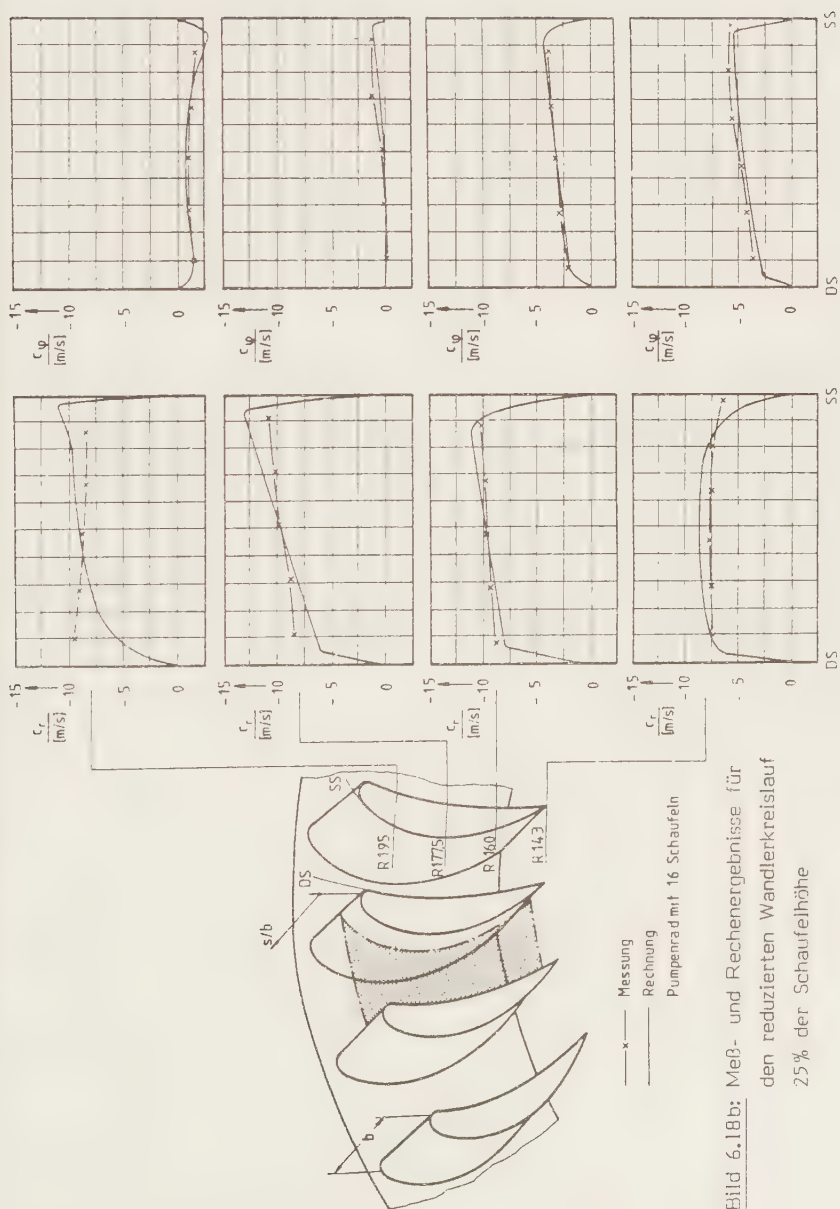


Bild 6.18b: Meß- und Rechenergebnisse für den reduzierten Wandlerkreislauf 25% der Schaufelhöhe

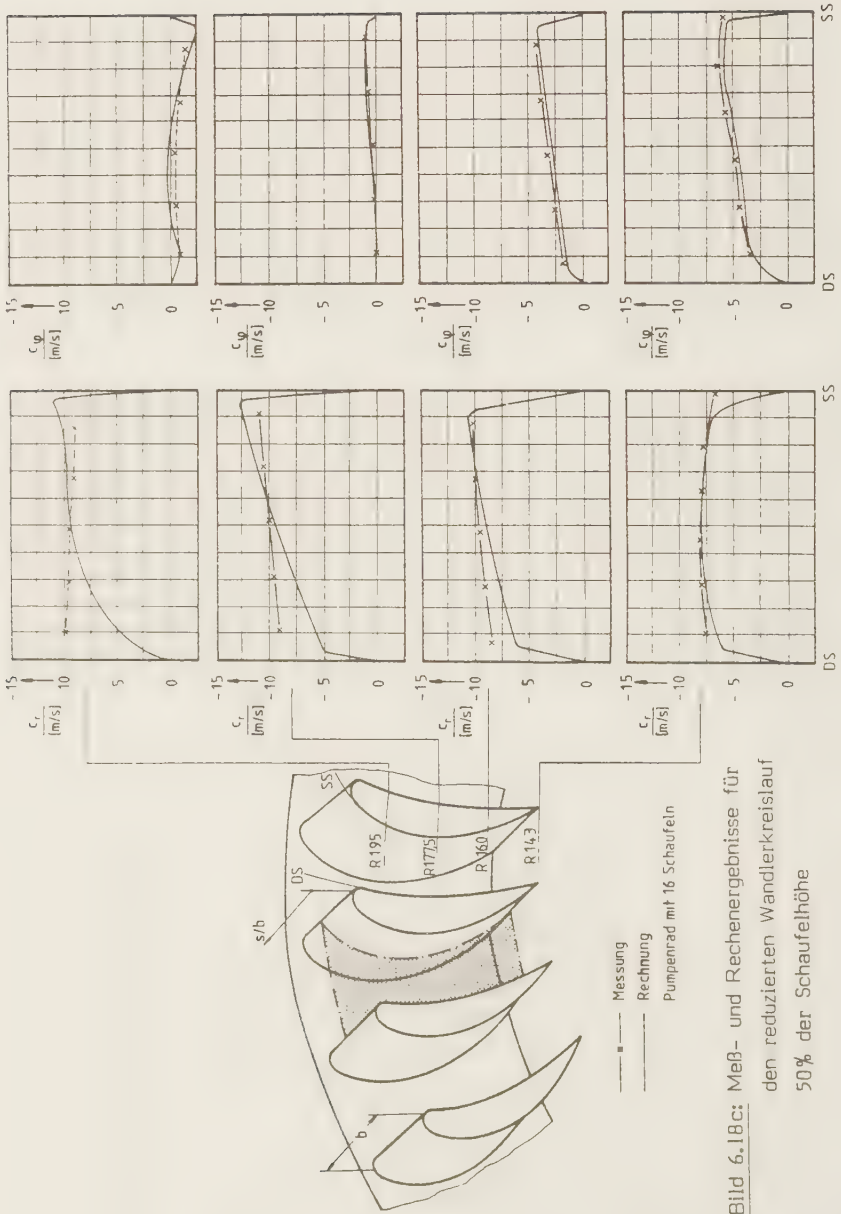


Bild 6.18c: Meß- und Rechenergebnisse für den reduzierten Wandlerkreislauf 50% der Schaufelhöhe

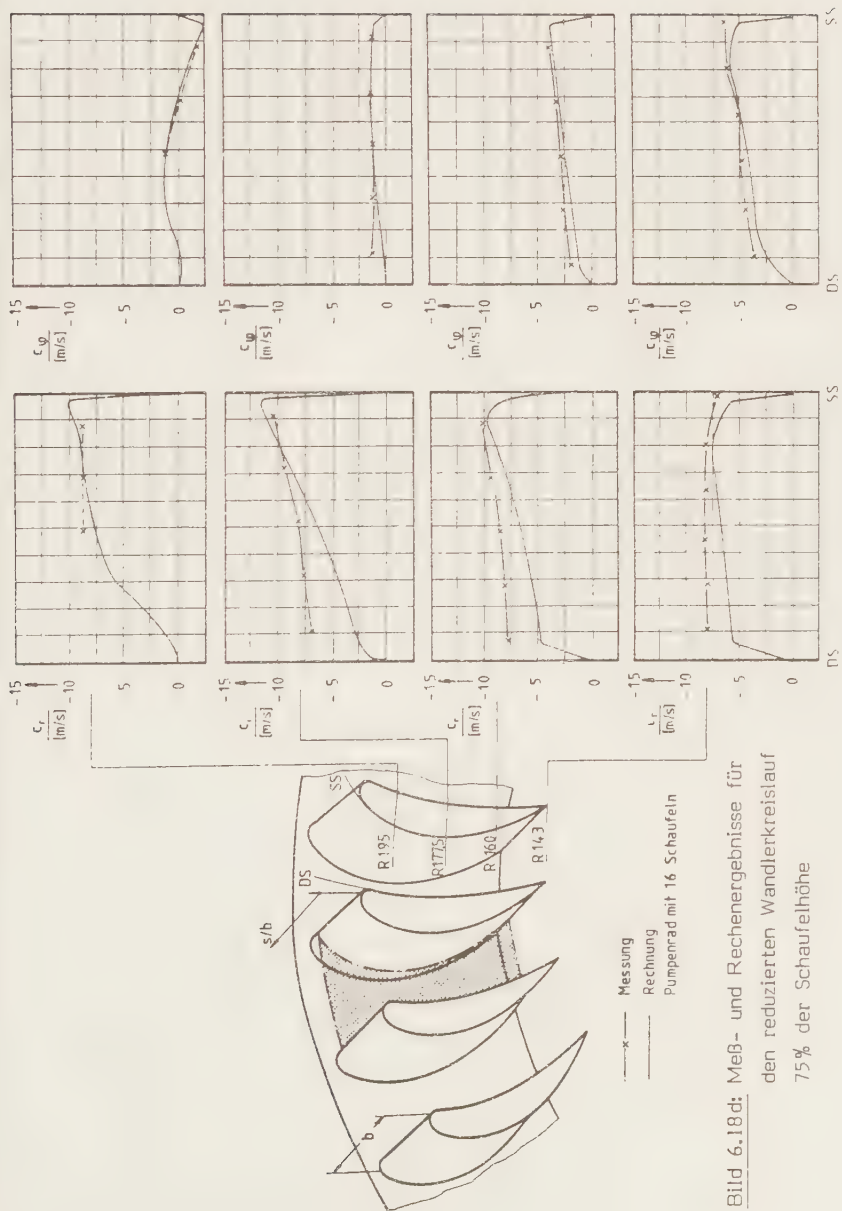


Bild 6.18d: Meß- und Rechenergebnisse für den reduzierten Wandlerkreislauf 75% der Schaufelhöhe

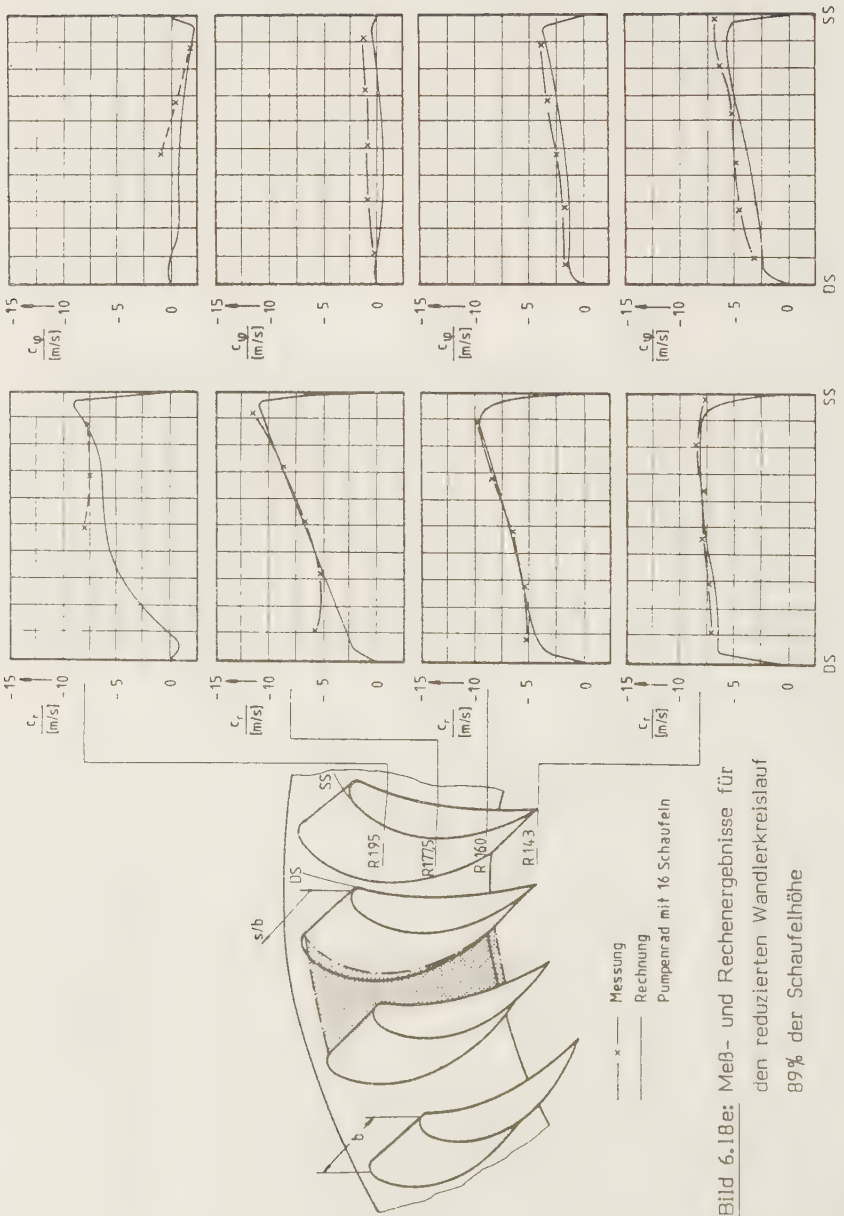


Bild 6.18e: Meß- und Rechenergebnisse für den reduzierten Wandlerkreislauf 89% der Schaufelhöhe

mentell festgestellt wurde. Diese augenfälligen Differenzen zwischen Messung und Rechnung haben mehrere Ursachen:

- Die Axialkomponente des Geschwindigkeitsvektors in der Eintrittsebene ist mit Hilfe einer Mehrlochsonde bestimmt worden, deren Anwendung besonders in der Nähe von Kanalwänden mit größeren Fehlern als das L2F-Verfahren behaftet ist.
- Die dem Turbulenzmodell und der Wandbehandlung zugrundeliegenden physikalischen Annahmen gelten in abgelösten Strömungen nicht mehr.
- Das Maschennetz besitzt in diesem Bereich keine hinreichende Stützpunktdichte, um die physikalischen Phänomene mit ausreichender, numerischer Genauigkeit nachzubilden.

In der Austrittsebene (R143) berechnet das relativ einfache Turbulenzmodell auf der konvexen Schaufelseite in der Nähe der Außenschale übergroße Grenzschichtdicken (Bild 6.18a, b).

Ein Vergleich der Umfangsgeschwindigkeitskomponenten zeigt sowohl in qualitativer als auch in quantitativer Hinsicht eine befriedigende bis gute Übereinstimmung zwischen experimentellen und vorausgerechneten Werten. Größere Abweichungen sind dabei nur im Bereich des Innenkerns ($s/b \rightarrow 1$; Bild 6.18e) feststellbar.

Die Ergebnisse des numerischen Lösungsverfahrens liefern in Übereinstimmung mit der experimentellen Untersuchung für die Ebene R195 bei den mittleren Schaufelhöhen $s/b = 0,50$ und $s/b = 0,75$ einen Vorzeichenwechsel in der Umfangskomponente. Die radiale Ausrichtung der Strömung in der Ebene R177,5 wird durch das numerische Ergebnis bestätigt. Im weiteren Verlauf des Leitradkanals richtet sich die Strömung entsprechend der Kanalgeometrie aus.

In Bild 6.19 ist die berechnete Entwicklung der Sekundärgeschwindigkeitskomponenten vom Eintritt (Ebene R217) bis zum Austritt (Ebene R143) dargestellt.

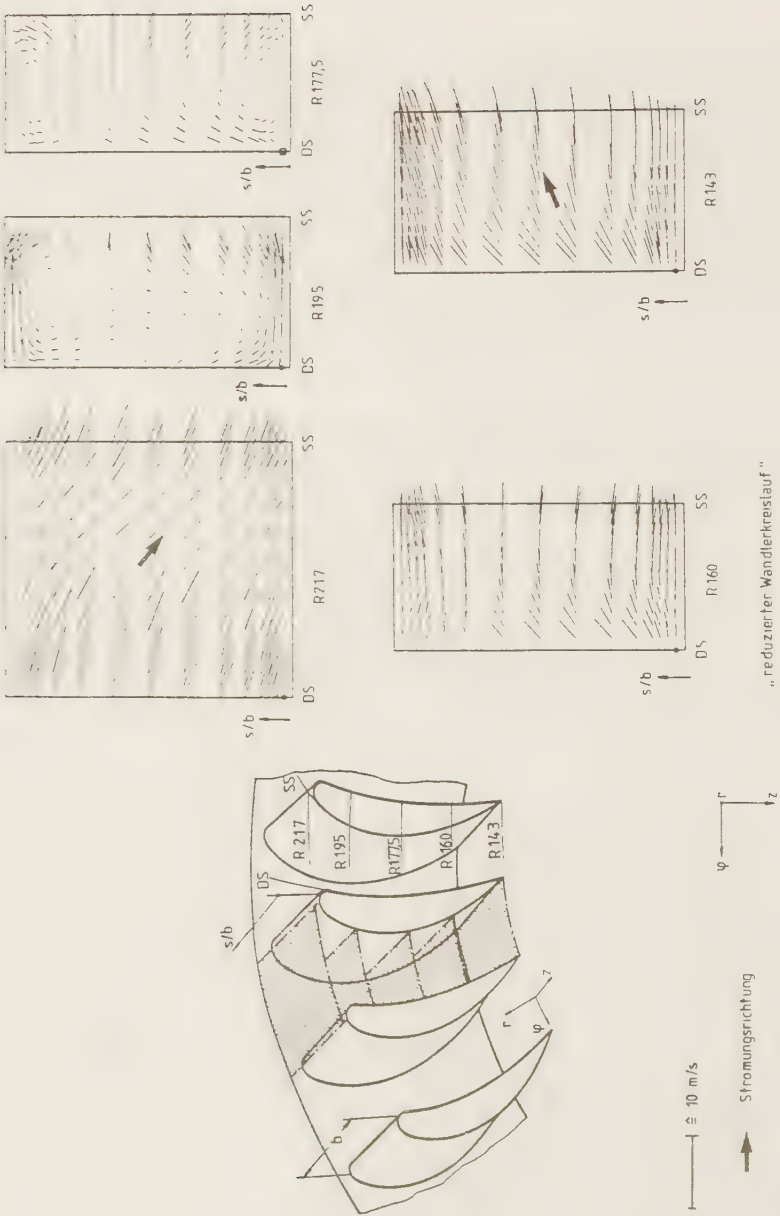


Bild 6.19: Berechnete Sekundärgeschwindigkeitskomponenten für den reduzierten Wandlerkreislauf auf fünf Querströmungsebenen

Die größten Axial- und Umfangskomponenten treten hierbei in der Eintrittsebene (R217) auf; sie sind in der Ebene R195 schon merklich kleiner geworden. Auffällig sind die relativ hohen Axialkomponenten auf der konkaven Schaufelseite bei mittleren Schaufelhöhen; sie nehmen sowohl in Richtung auf den Innenkern ($s/b \rightarrow 1$) als auch zur Außenschale ($s/b \rightarrow 0$) hin ab. In der Ebene R177,5 sind zwei entgegengesetzt rotierende Wirbel zu erkennen, die allerdings bereits in der Ebene R160 vollständig aus dem Strömungsbild verschwunden sind. In der Austrittsebene (R143) zeigt sich schließlich eine geordnete Abströmung, wobei das Strömungsbild durch die nachfolgende untere 90°-Umlenkung beeinflusst wird.

6.2.2.2 Die Leitradströmung im vollständigen Wandlerkreislauf

Ergebnisse der dreidimensionalen Strömungsuntersuchung

Bei den Beispielen der Fälle 2, 3 und 4 handelt es sich um Strömungsuntersuchungen im Leitradkanal des vollständigen Wandlerkreislaufes. Für die unterschiedlichen Betriebspunkte stellten sich die folgenden umlaufenden Volumenströme ein:

$$\dot{V} = 0,183 \text{ m}^3/\text{s} \text{ im Fall 2}$$

$$\dot{V} = 0,177 \text{ m}^3/\text{s} \text{ im Fall 3}$$

$$\dot{V} = 0,165 \text{ m}^3/\text{s} \text{ im Fall 4}$$

Diese Werte entsprechen in der Eintrittsebene (R217) einer mittleren Radialgeschwindigkeit $\bar{c}_r$ von:

$$\bar{c}_r = 2,86 \text{ m/s} \text{ im Fall 2}$$

$$\bar{c}_r = 2,77 \text{ m/s} \text{ im Fall 3}$$

$$\bar{c}_r = 2,58 \text{ m/s} \text{ im Fall 4}$$

Für den vollständigen Wandlerkreislauf sind im Leitradkanal L2F-Messungen unter anderem in den drei Meßflächen R217 (Leitradeintritt), R177,5 (Leitradkanal) und R143 (Leitradaustritt) durchgeführt worden, deren Ergebnisse in Bild 6.20 zu sehen sind.

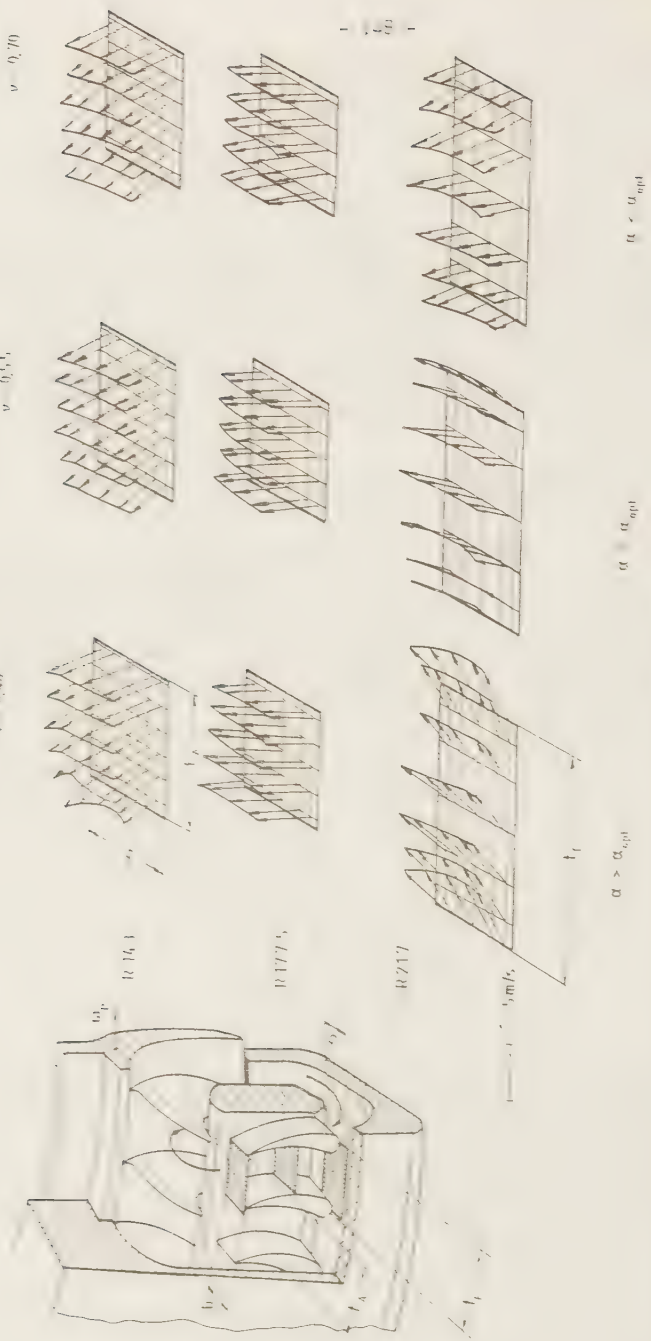


Bild 6.20: Mit dem L2F-Verfahren gemessene Geschwindigkeitsvektoren
 für den Fall 4 $v = 0,40$; den Fall 3 $v = 0,55$; den Fall 2
 $v = 0,70$; nach [12]

Für jeden der drei Betriebspunkte zeigt sich in der Eintrittsebene R217 eine unterschiedliche Anströmungsrichtung. Diese Fehlanströmungen resultieren aus der vom vorangehenden Turbinenrad aufgetragenen und im allgemeinen ungleichmäßig über der Kanalbreite verteilten Strömungsrichtung [12]. Die Strömung gleicht sich jedoch bereits bei ungefähr der halben Leitradkanallänge der Schaufelgeometrie an. Aus diesem Grund ergeben sich am Leitradaustritt (R143) nahezu identische Strömungsbilder, und zwar unabhängig vom jeweiligen Betriebspunkt.

In der Eintrittsebene (R217) befindet sich für die drei betrachteten Betriebspunkte das Geschwindigkeitsmaximum in der Nähe des Innenkerns.

Die Leitradströmung zeigt für den Betriebspunkt $v_2 = 0,70$ einen "Rückenstoß", der an der konkaven Schaufelseite zu einer Verzögerung der Strömung führt. Im Optimalpunkt $v_3 = 0,55$ stellt sich eine stoßfreie Anströmung ein, während für den Betrieb bei belasteter Turbine ($v_4 = 0,40$) die Anströmung einen "Bruststoß" aufweist. Wegen dieser Fehlanströmung werden die Verzögerungen in den Radialgeschwindigkeiten auf der konvexen Schaufelseite liegen. Aufgrund der nicht-verschwindenden Axialgeschwindigkeitskomponente am Schaufeleintritt treten die stärksten Verzögerungen in der Radialgeschwindigkeit in der Nähe des Innenkerns ($s/b \rightarrow 1$) auf.

Die gemessenen Geschwindigkeitsprofile in der Eintrittsebene (R217) sind der Rechnung vorgegeben worden. Einen qualitativen Eindruck der berechneten Strömungsvektoren für die drei Betriebspunkte $v_2 = 0,70$, $v_3 = 0,55$ und $v_4 = 0,40$ vermittelt Bild 6.21. Um einen Vergleich mit den experimentell ermittelten Strömungsgeschwindigkeiten zu ermöglichen, werden die numerischen Ergebnisse auf den Querströmungsebenen des Bildes 6.20 dargestellt.

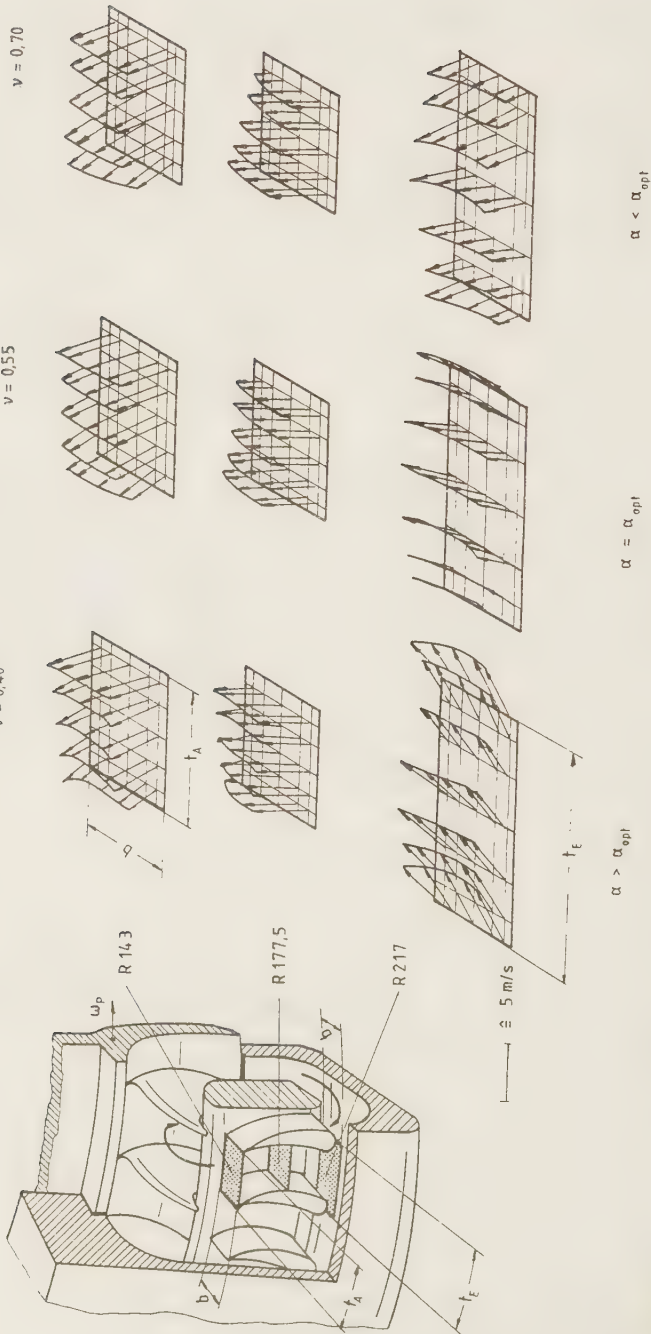


Bild 6.21: Berechnete Geschwindigkeitsvektoren für den Fall 4: $v = 0,40$; den Fall 3: $v = 0,55$; den Fall 2: $v = 0,70$

Das Rechenprogramm berechnet in jedem der drei Betriebspunkte für die Ebene R177,5 in Übereinstimmung mit den Messungen ein der Schaufelgeometrie angeglichenes Strömungsprofil. Für den Betriebspunkt $v_2 = 0,70$, d. h. für die zunehmend entlastete Turbine, befindet sich in der Nähe des Innenkerns ($s/b \rightarrow 1$) auf der konkaven Schaufelseite ein Gebiet geringer Radialgeschwindigkeit, während die maximalen Geschwindigkeiten auf der konvexen Schaufelseite ebenfalls in der Nähe des Innenkerns liegen. Im Optimalpunkt zeigt sich für diese Ebene ein ausgeglichenes Strömungsbild, während bei zunehmend belasteter Turbine $v_4 = 0,40$ die Zone geringer Radialgeschwindigkeit auf die konvexe Schaufelseite, ebenfalls in der Nähe des Innenkerns ($s/b \rightarrow 1$), wechselt. Die Strömungsrichtung am Leitradaustritt (R143) ist im dargestellten Betriebsbereich von $0,40 < v < 0,70$ nahezu unabhängig vom jeweiligen Drehzahlverhältnis und vollständig durch die Schaufelgeometrie bestimmt.

In allen drei betrachteten Betriebspunkten zeigt sich eine gute bis sehr gute Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung.

Einen quantitativen Vergleich zwischen den Ergebnissen der experimentellen Untersuchung und denen des numerischen Lösungsverfahrens lassen die Bilder 6.22 bis 6.24 für die drei Betriebspunkte $v_2 = 0,70$, $v_3 = 0,55$ und $v_4 = 0,40$ erkennen. Hierbei werden die gemessenen und gerechneten Radial- und Umfangsgeschwindigkeitskomponenten, c_r und c_φ , in den Ebenen R195, R177,5, R160 und R143 für jeweils 11%, 25%, 50%, 75% und 89% der Schaufelhöhe aufgetragen.

Fall 2: $v = 0,70$ (zunehmend entlastetes Turbinenrad)

Der Vergleich der Geschwindigkeitskomponenten in radialer Richtung weist in weiten Bereichen gute Übereinstimmung zwischen gemessenen und berechneten Werten auf. Entsprechend dem Winkel der Fehlanströmung ("Rückenstoß") zeigt sich für die numerische Lösung in der Ebene R195 bei 89% der Schaufelhöhe auf

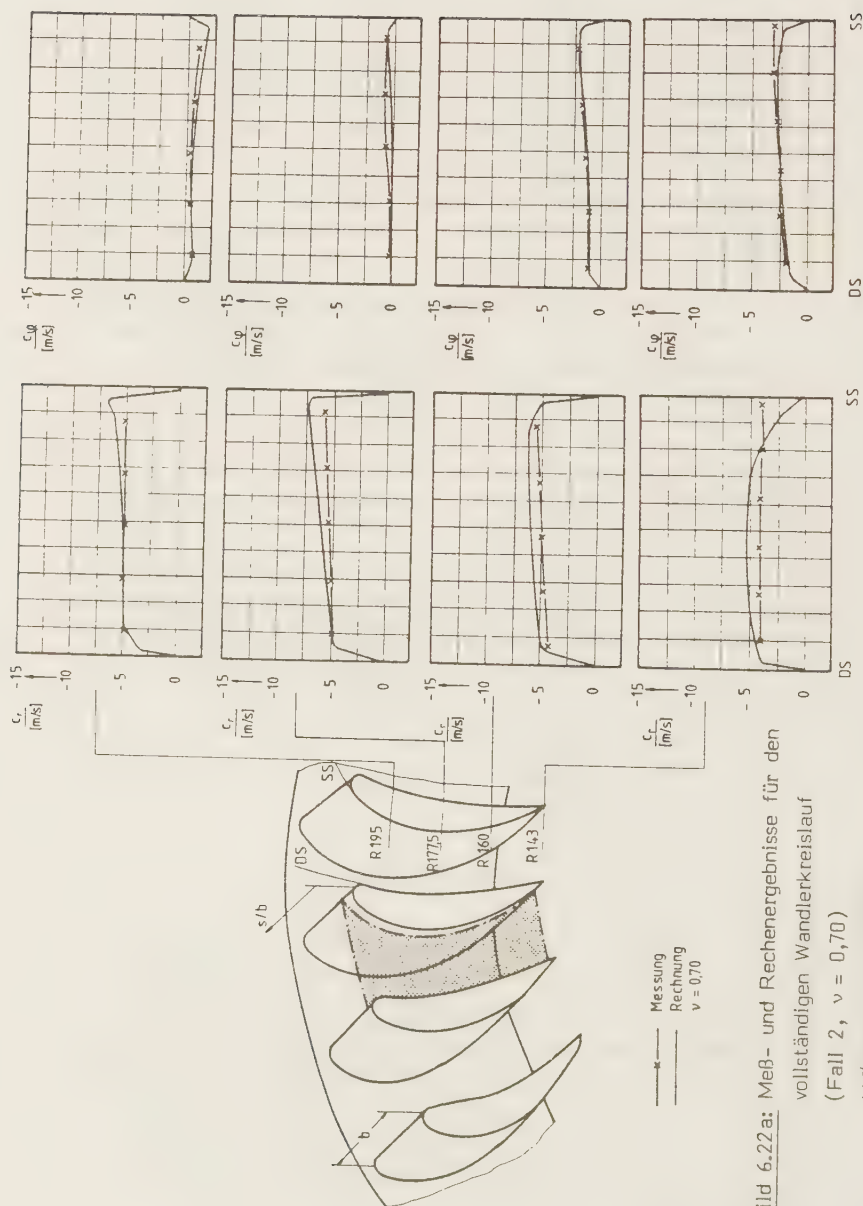


Bild 6.22a: Meß- und Rechenergebnisse für den vollständigen Wandlerkreislauf (Fall 2, $v = 0,70$) 11% der Schaufelhöhe

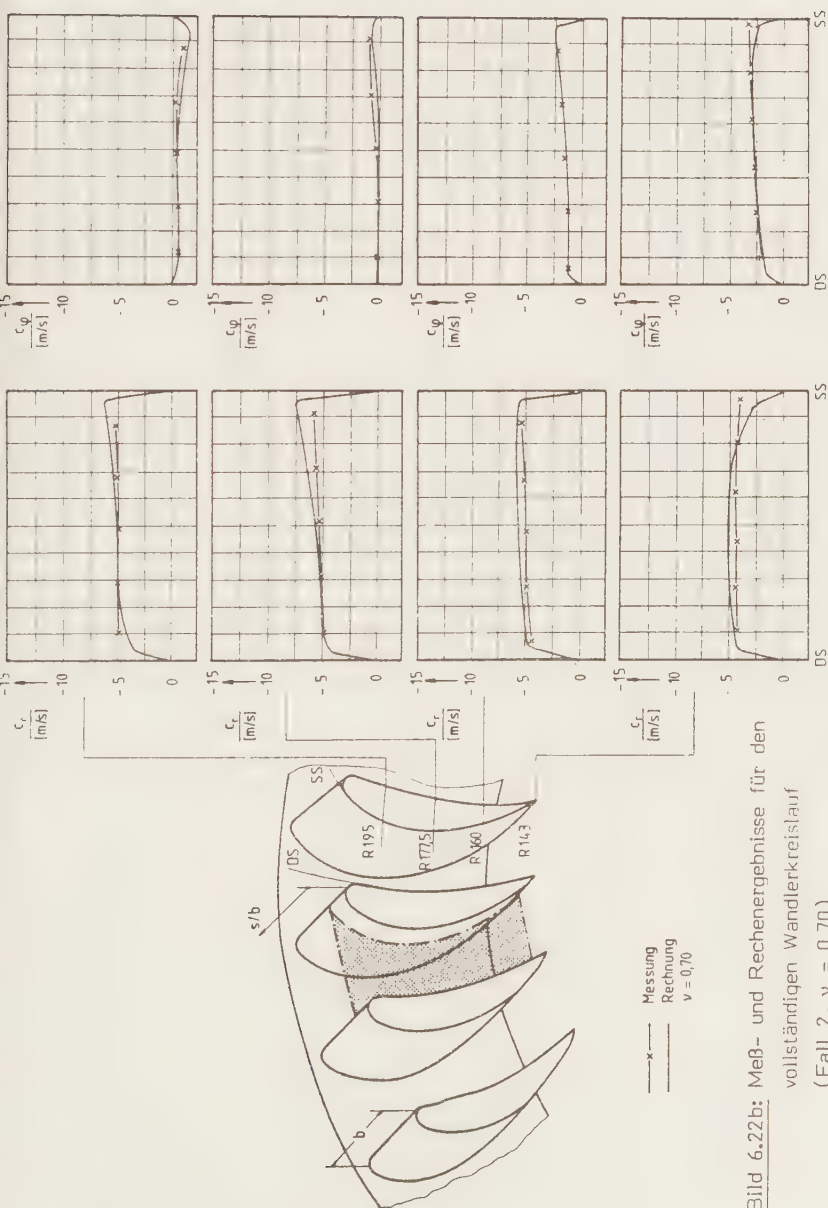


Bild 6.22b: Meß- und Rechenergebnisse für den vollständigen Wandlerkreislauf (Fall 2, $v = 0,70$) 25% der Schaufelhöhe

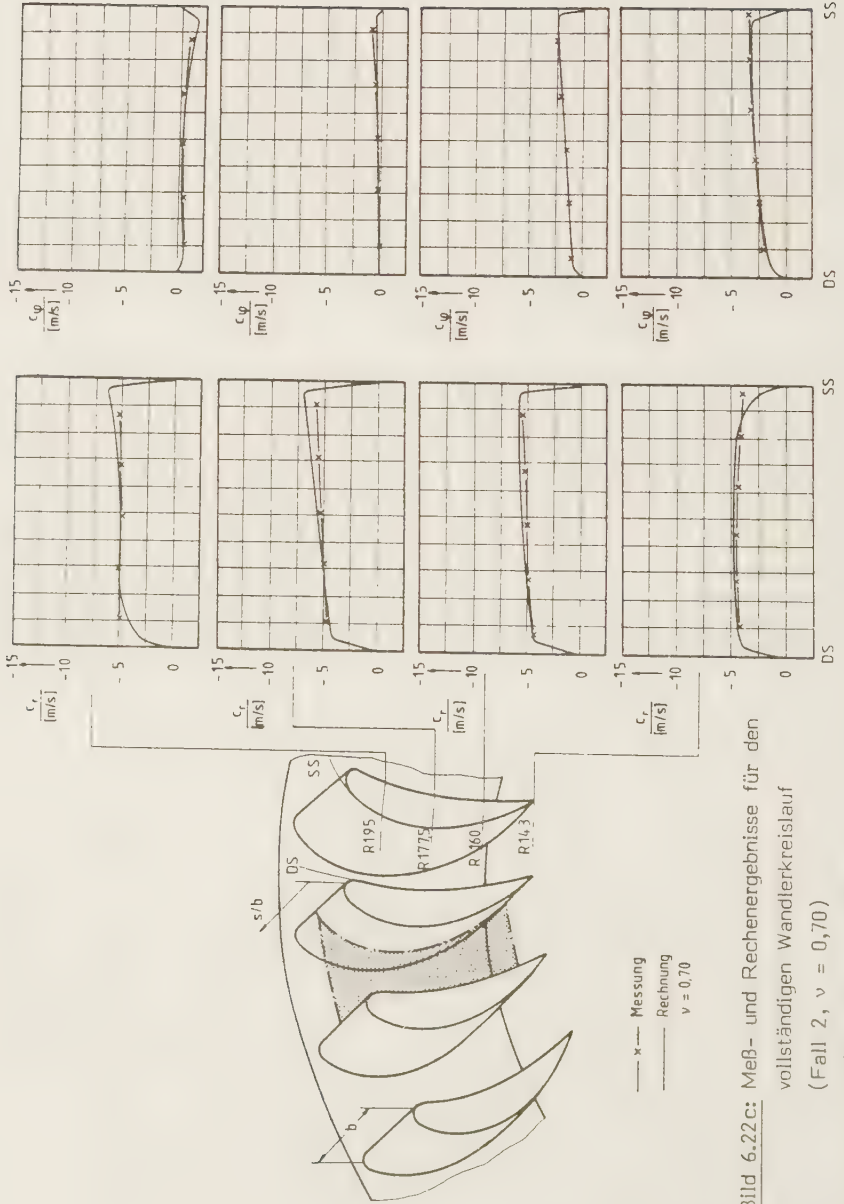


Bild 6.22c: Meß- und Rechenergebnisse für den vollständigen Wandlerkreislauf (Fall 2, $v = 0,70$) 50% der Schaufelhöhe

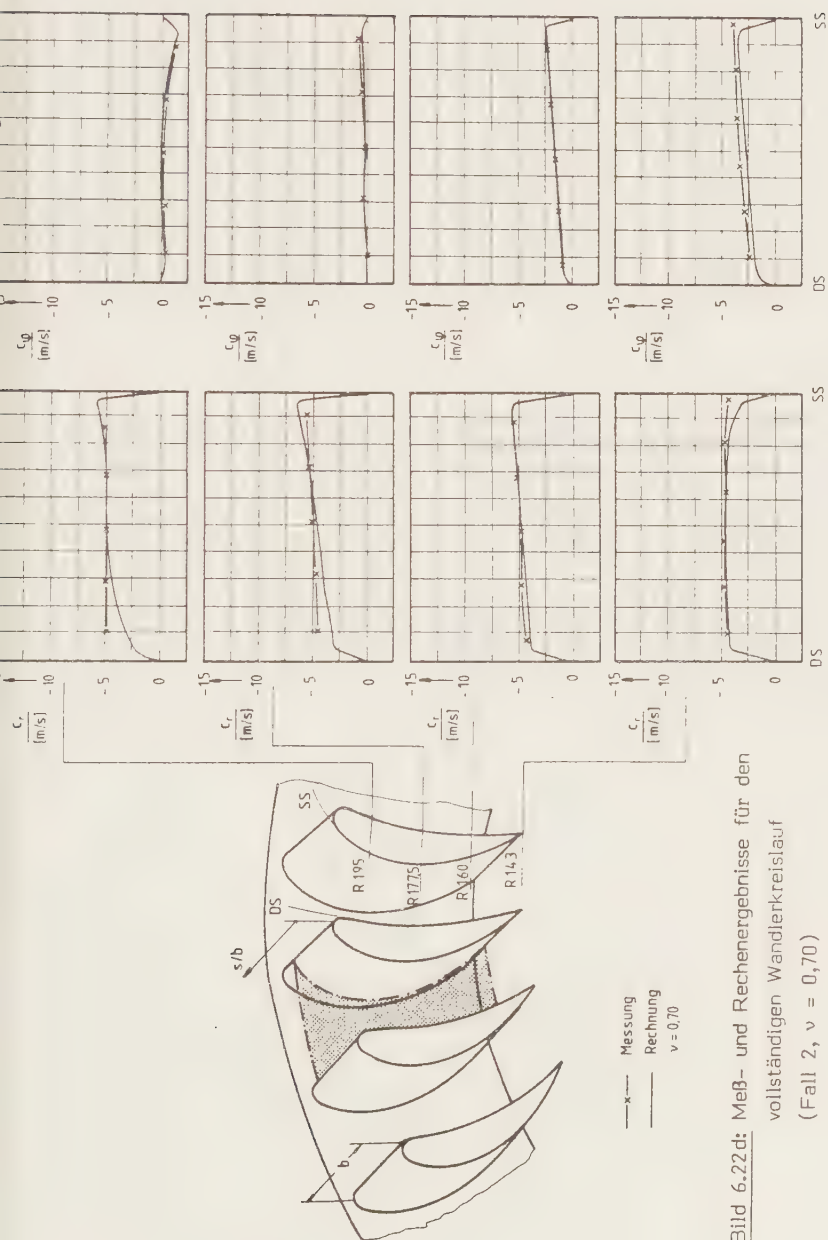


Bild 6.22d: Meß- und Rechenergebnisse für den vollständigen Wandlerkreislauf (Fall 2, $v = 0,70$) 75% der Schaufelhöhe

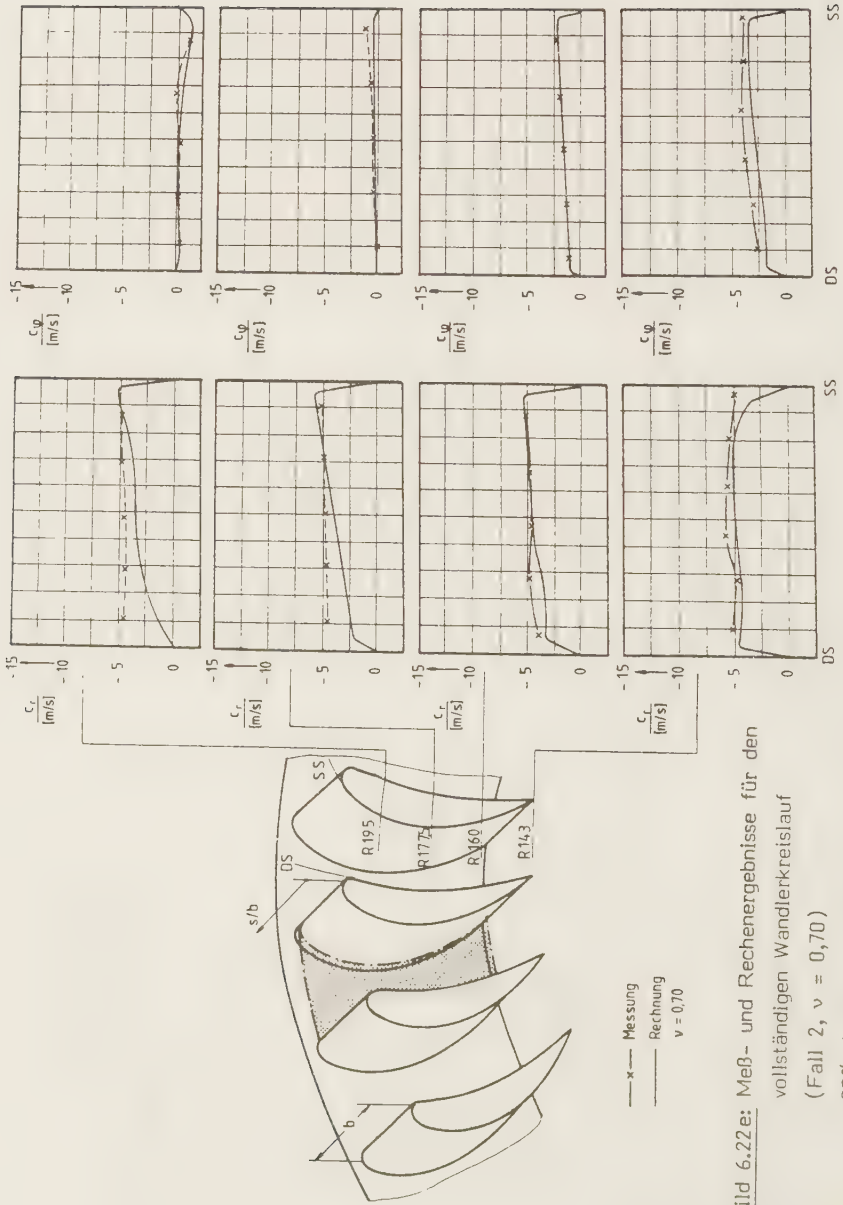


Bild 6.22e: Meß- und Rechenergebnisse für den vollständigen Wandlerkreislauf (Fall 2, $v = 0,70$) 89% der Schaufelhöhe

der Schaufeldruckseite ein Gebiet mit reduzierter Radialgeschwindigkeit (Bild 6.22e). Im weiteren Kanalverlauf entsteht eine ausgeglichene Radialgeschwindigkeitsverteilung, wobei in der Ebene R177,5 noch ein geringer Geschwindigkeitsanstieg von der Druck- zur Saugseite festzustellen ist.

Die berechneten Radialgeschwindigkeitsverteilungen liegen, abgesehen von denen in der Nähe des Innenkerns ($s/b = 0,89$), oberhalb der experimentell erfaßten Daten. Bestimmt man den Volumenstrom allerdings mit den gemessenen Daten durch die jeweilige Meßfläche, so zeigt sich, daß dieser Wert stets kleiner als der am Eintritt ist. Dagegen liefert das Rechenverfahren ständig einen konstanten Volumenstrom.

Die Übereinstimmung der Umfangskomponenten zwischen Meß- und Rechenergebnissen ist sehr gut. Die berechneten Umfangskomponenten belegen die radial ausgerichtete Strömung in der Ebene R177,5 und die Angleichung des Strömungszustandes an die Schaufelgeometrie im weiteren Kanalverlauf.

Fail 3: $v = 0,55$ (Optimalpunkt mit nahezu schaufelkongruenter Anströmung)

Die berechneten Radialgeschwindigkeiten stimmen bei annähernd schaufelkongruenter Anströmung ($v_z = 0,55$) gut mit den aus L2F-Messungen stammenden Radialgeschwindigkeiten überein. Die Abweichungen zwischen gemessenen und berechneten Umfangsgeschwindigkeiten sind im gesamten Strömungsbereich sehr gering.

Einen ausgeglichenen Verlauf von der Druck- zur Saugseite zeigen die berechneten Radialgeschwindigkeiten, wobei für die Ebene R195 das Geschwindigkeitsmaximum auf der konvexen Schaufel- seite in der Nähe des Innenkerns ($s/b = 0,89$) liegt. In der Austrittsebene (R143) ist kein ausgeprägtes Geschwindigkeitsmaximum erkennbar; allerdings treten in der Nähe des Innenkerns aufgrund der nachfolgenden 90°-Umlenkung graduell höhere Radialgeschwin-

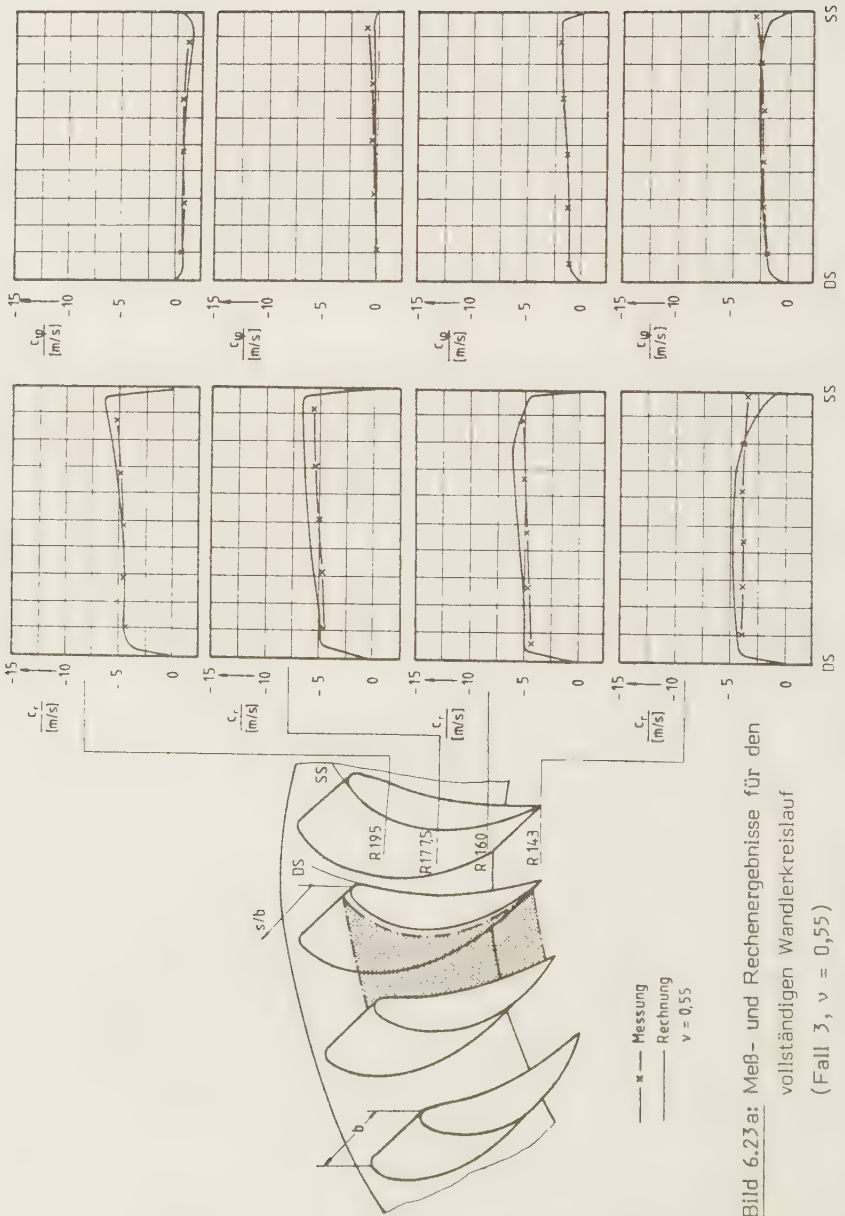


Bild 6.23a: Meß- und Rechenergebnisse für den vollständigen Wandlerkreislauf (Fall 3, $v = 0,55$) 11% der Schaufelhöhe

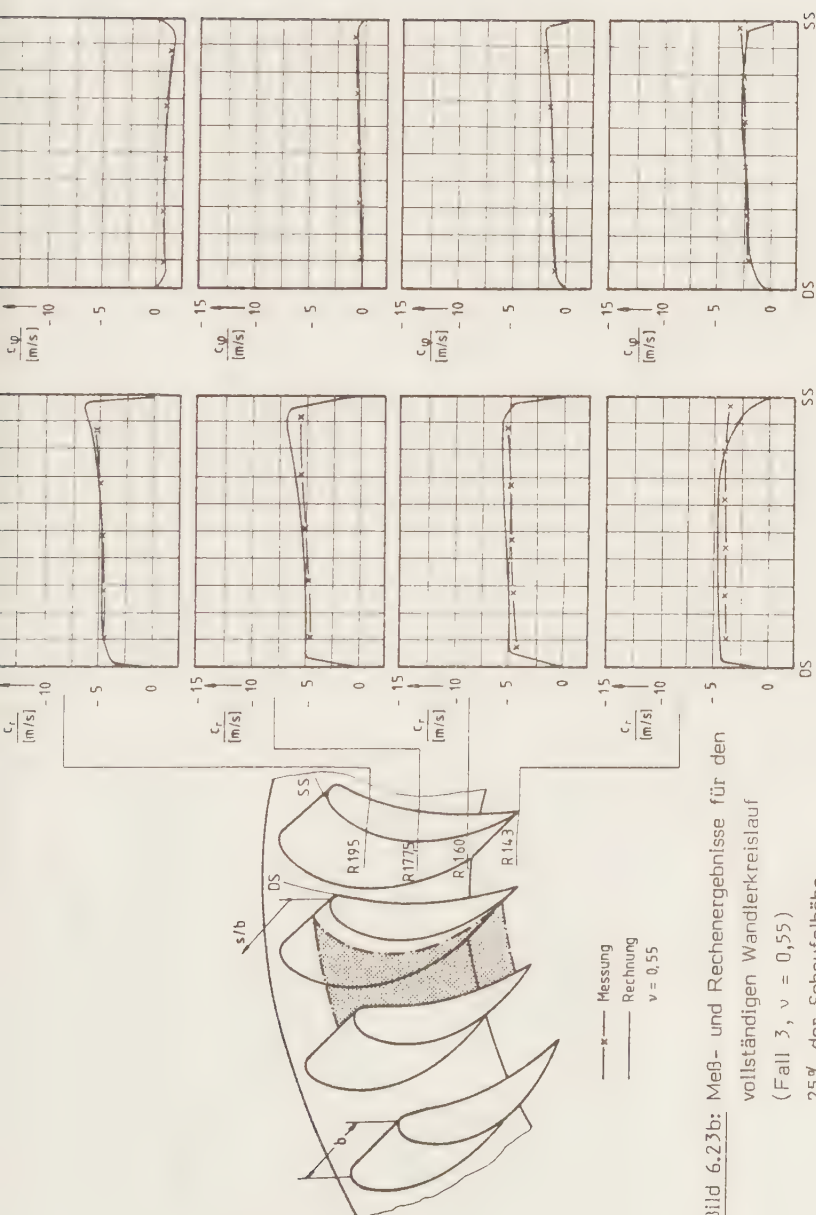


Bild 6.23b: Meß- und Rechenergebnisse für den vollständigen Wandlerkreislauf (Fall 3, $v = 0.55$) 25% der Schaufelhöhe

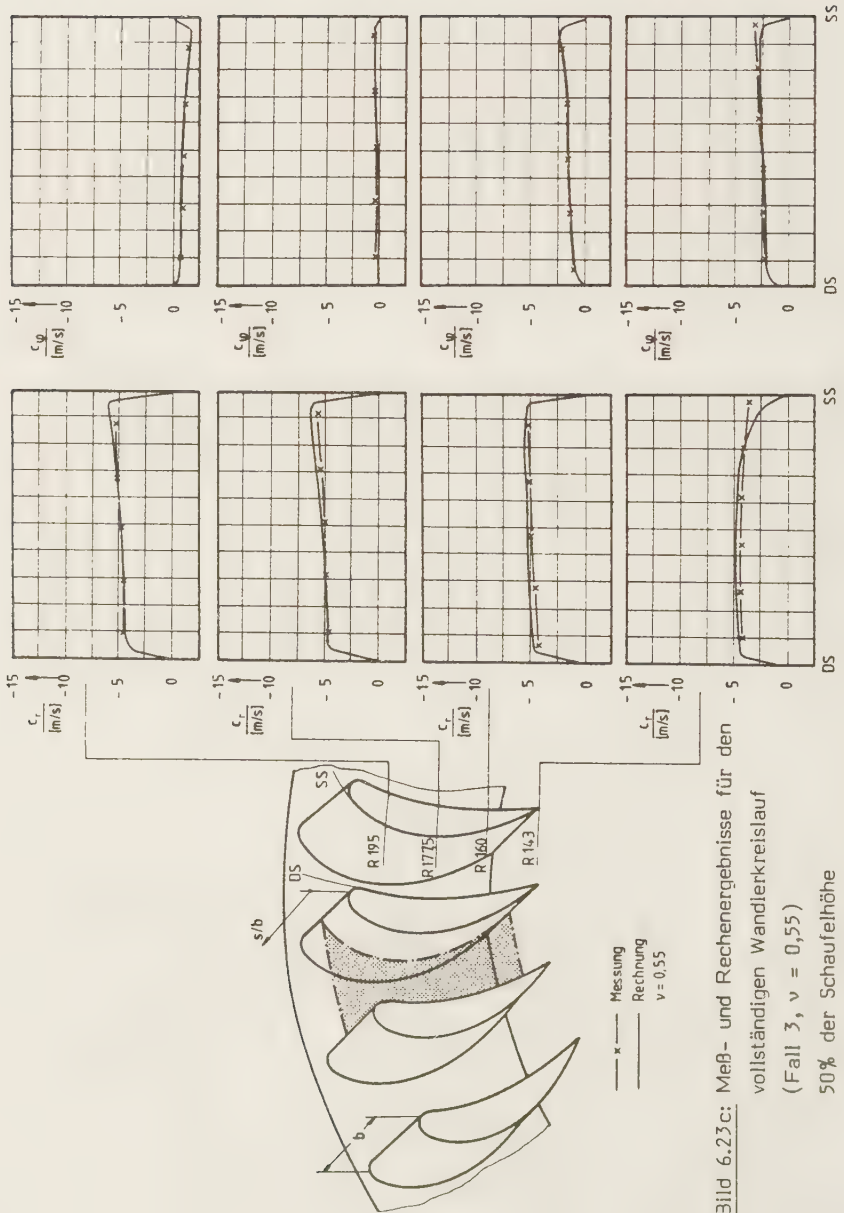


Bild 6.23c: Meß- und Rechenergebnisse für den vollständigen Wandlerkreislauf (Fall 3, $v = 0,55$) 50% der Schaufelhöhe

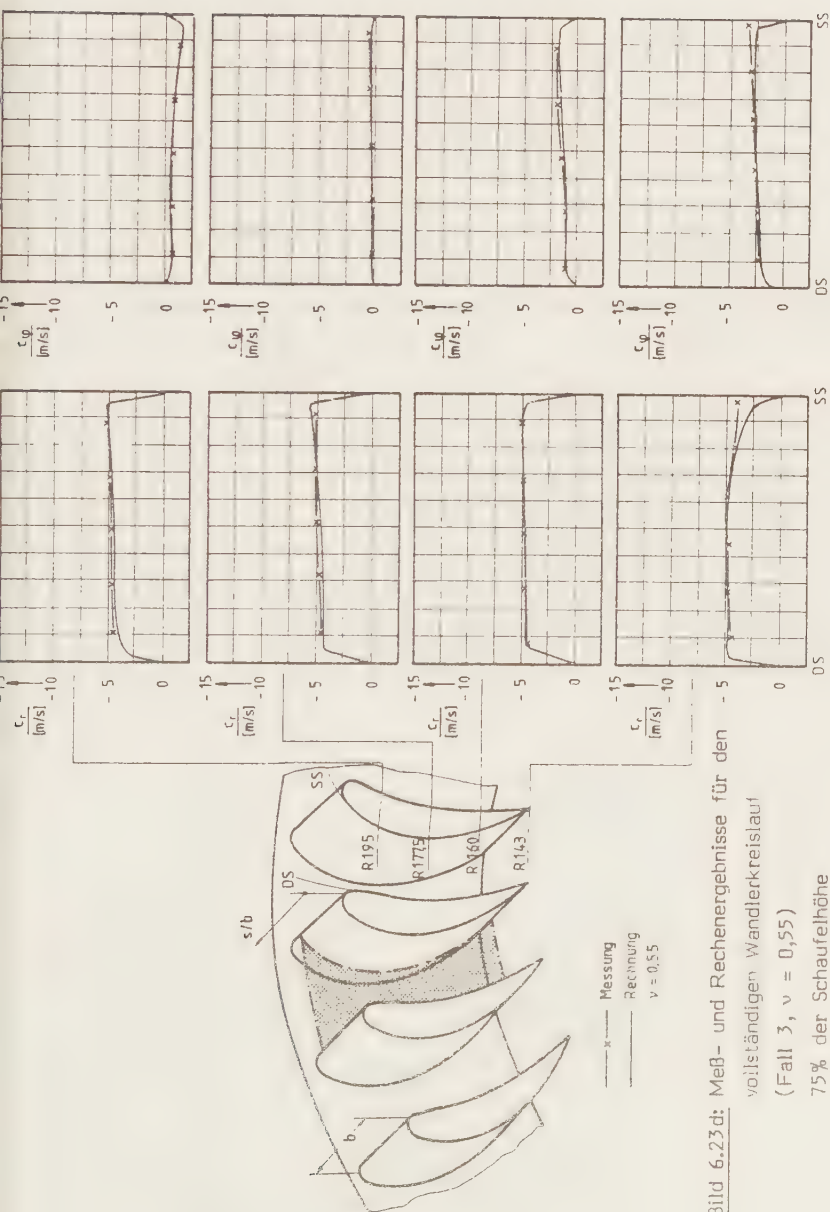


Bild 6.23d: Meß- und Rechenergebnisse für den vollständigen Wandlerkreislauf (Fall 3, $v = 0.55$) 75% der Schaufelhöhe

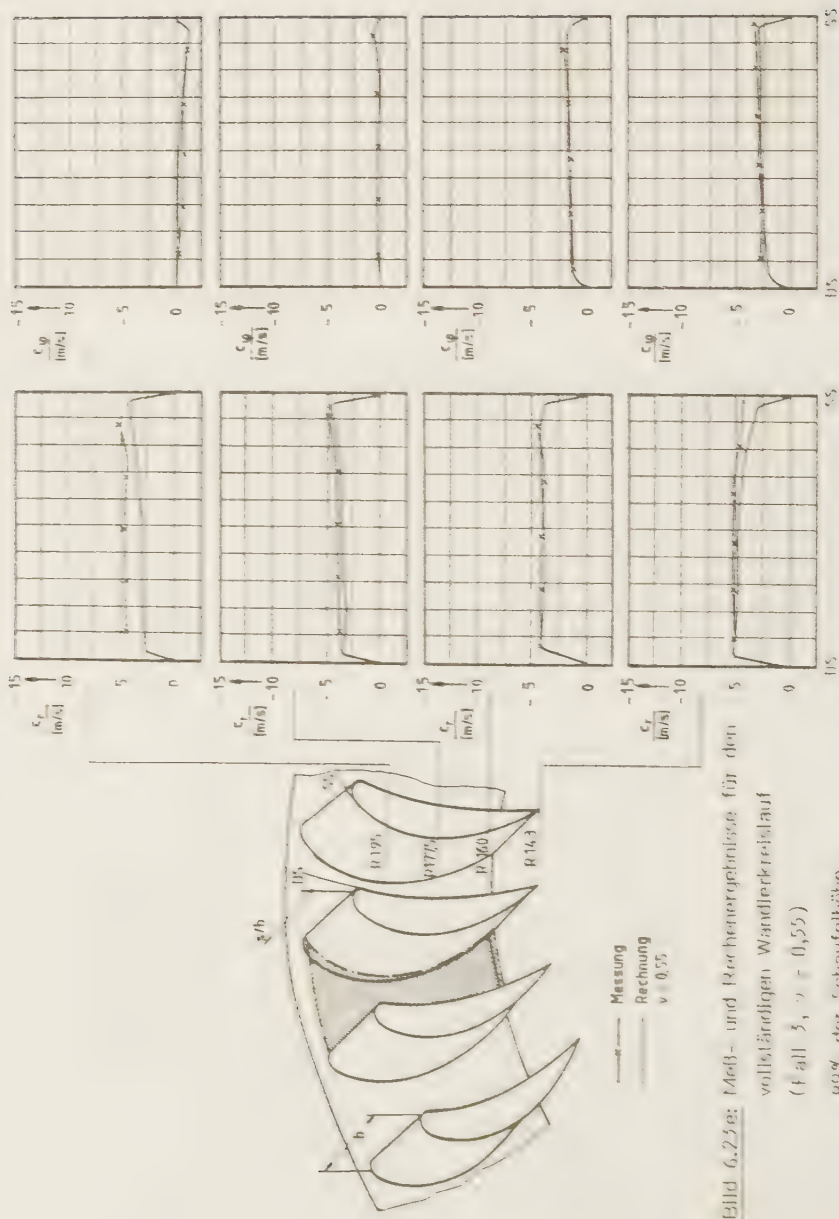


Bild 6.2.5e: Meß- und Rechenergebnisse für den vollständigen Wandlerkreislauf (Fall 3, $\alpha = 0,55$) 89% der Schauffelhöhe

digkeiten auf.

Im Einklang mit den experimentellen Daten sind in der Ebene R177,5 die vom Turbinenrad aufgeprägten Störungen im Geschwindigkeitsprofil verschwunden, und die Strömung hat sich der Schaufelgeometrie angeglichen.

Fall 4: $v = 0,40$ (zunehmend belastetes Turbinenrad)

Für 11%, 25% und 50% der Schaufelhöhe stimmen die gerechneten und gemessenen Radialgeschwindigkeitsprofile gut überein (Bild 6.24a,b,c). Allerdings wird in der Austrittsebene des Leitradkanals (R143) für diesen Betriebspunkt auf der konvexen Schaufelseite eine zu große Grenzschichtdicke bestimmt. Bei 75% und 89% der Schaufelhöhe weisen die gemessenen Radialgeschwindigkeitsverteilungen in den Ebenen R195 und R177,5 einen positiven Geschwindigkeitsgradienten von der Druck- zur Saugseite der Schaufel auf (Bild 6.24d,e). Das Leitrad wird aber in diesem Betriebspunkt mit einem "Bruststoß" angeströmt (vgl. Tabelle 6.1), der an der konvexen Schaufelseite (Saugseite der Schaufel) zu einer Strömungsablösung führen kann. Entsprechend diesem vorgegebenen Strömungsprofil berechnet das numerische Lösungsverfahren eine Zone reduzierter Radialgeschwindigkeit auf der konvexen Schaufelseite, die sich wegen der am Eintritt vorliegenden Axialgeschwindigkeitskomponente auf die Nähe des Innenkerns ($s/b = 0,75$, $s/b = 0,89$) beschränkt.

Bestimmt man aus den gemessenen Radialgeschwindigkeitskomponenten für eine bestimmte Querströmungsebene den durchtretenden Volumenstrom, so ergeben sich im Inneren des Leitradkanals stets größere Werte als am Eintritt. Jedoch ist für die Rechnung ein Volumenstrom maßgebend, der sich aus dem vorgegebenen Geschwindigkeitsprofil am Eintritt bestimmt und von dem Rechenverfahren unter allen Umständen beibehalten wird. Aus diesem Grunde müssen die berechneten Radialgeschwindigkeitskomponenten im Mittel kleiner als die Meßwerte sein.

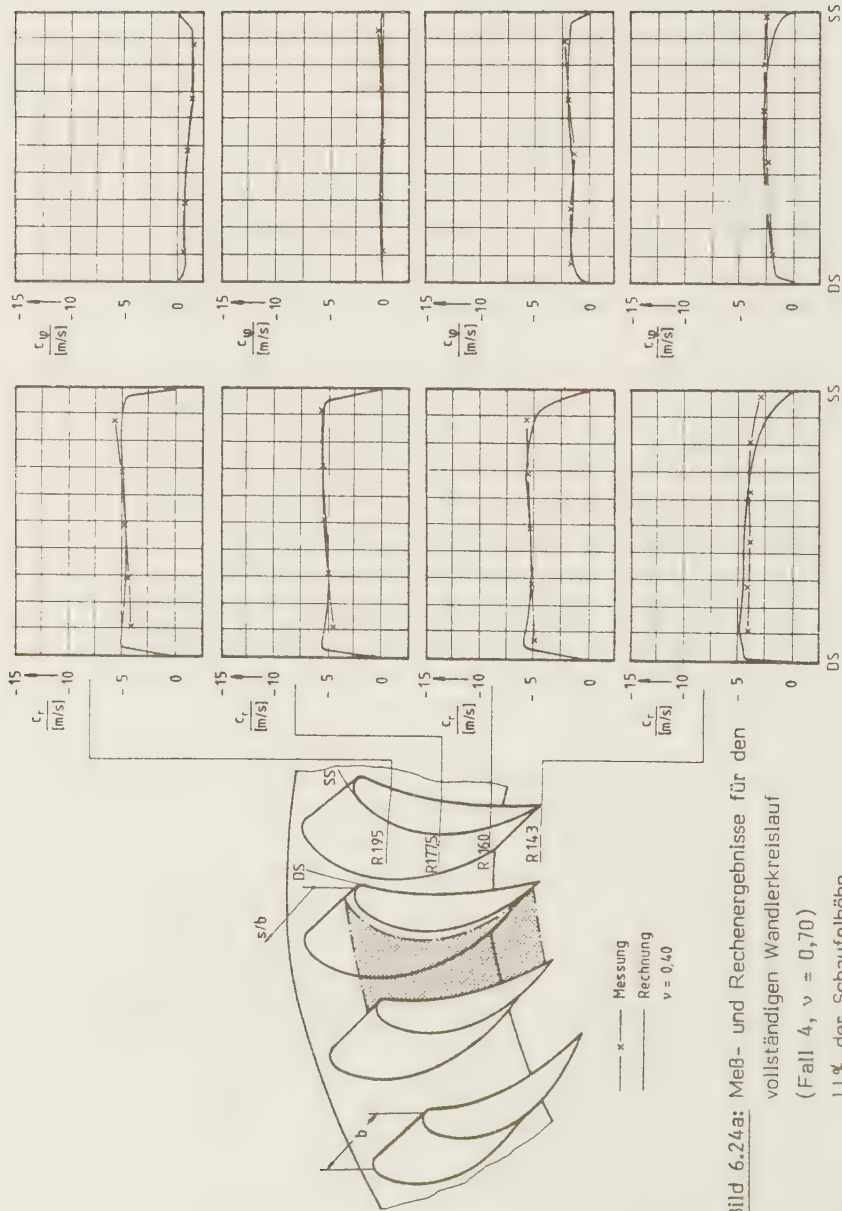


Bild 6.24a: Meß- und Rechenergebnisse für den vollständigen Wandlerkreislauf (Fall 4, $v \approx 0,70$) 11% der Schaufelhöhe

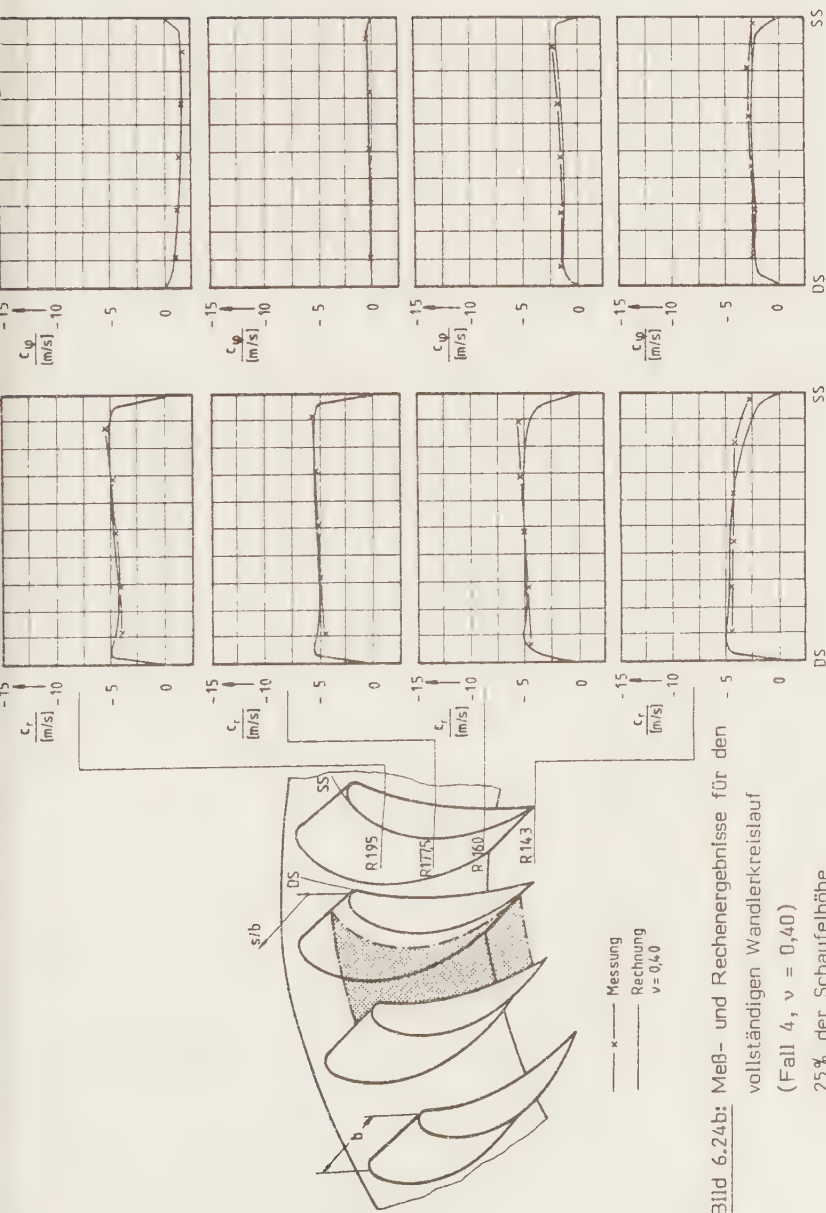


Bild 6.24b: Meß- und Rechenergebnisse für den
vollständigen Wandlerkreislauf
(Fall 4, $v = 0,40$)
25% der Schaufelhöhe

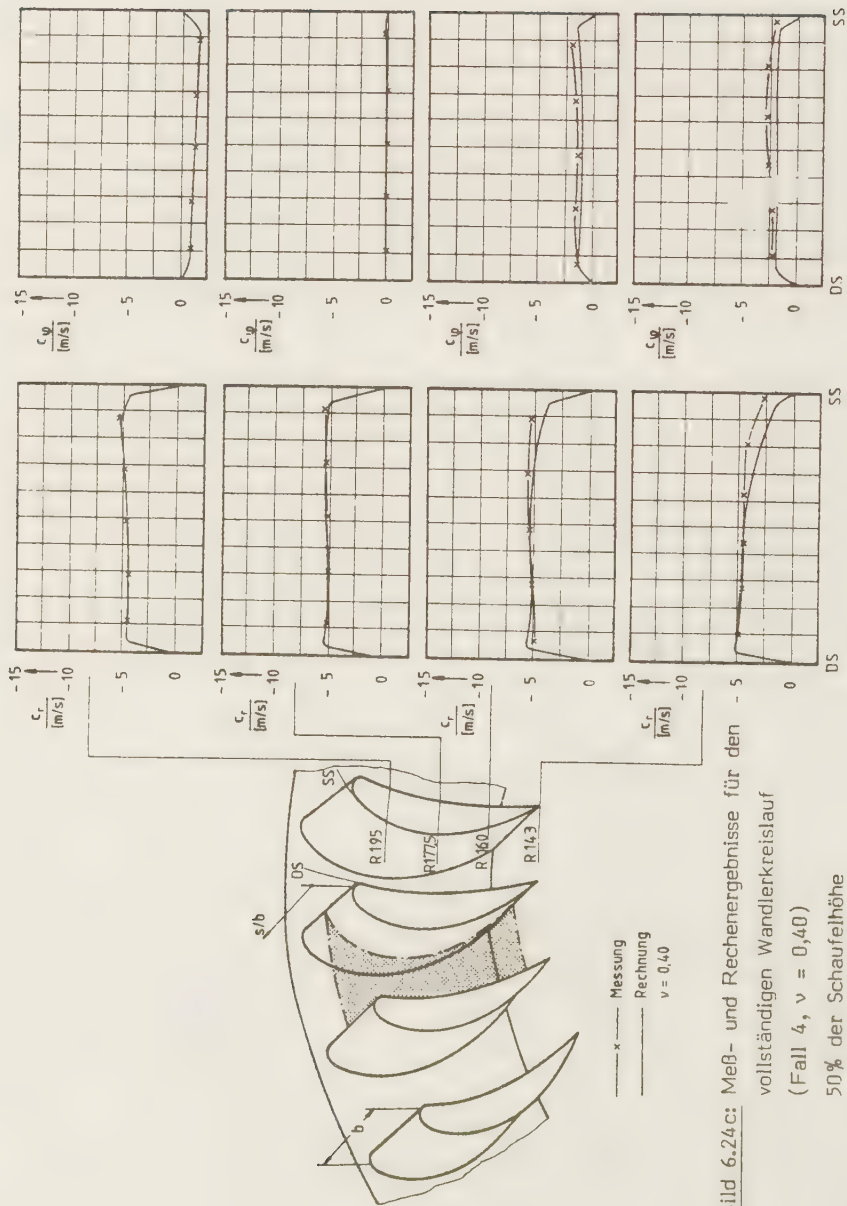


Bild 6.24c: Meß- und Rechenergebnisse für den vollständigen Wandlerkreislauf (Fall 4, $v = 0,40$) 50% der Schaufelhöhe

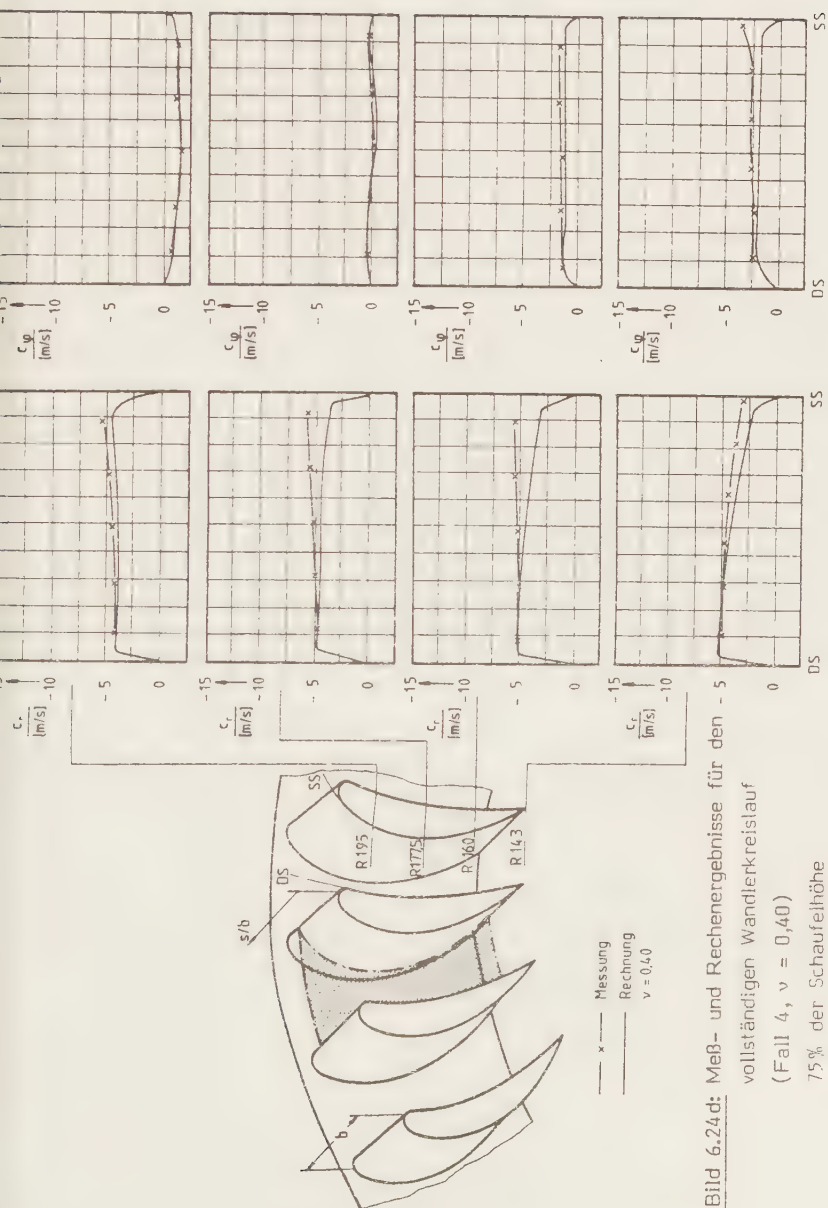


Bild 6.24d: Meß- und Rechenergebnisse für den vollständigen Wandlerkreislauf (Fall 4, $v = 0,40$) 75% der Schaufelhöhe

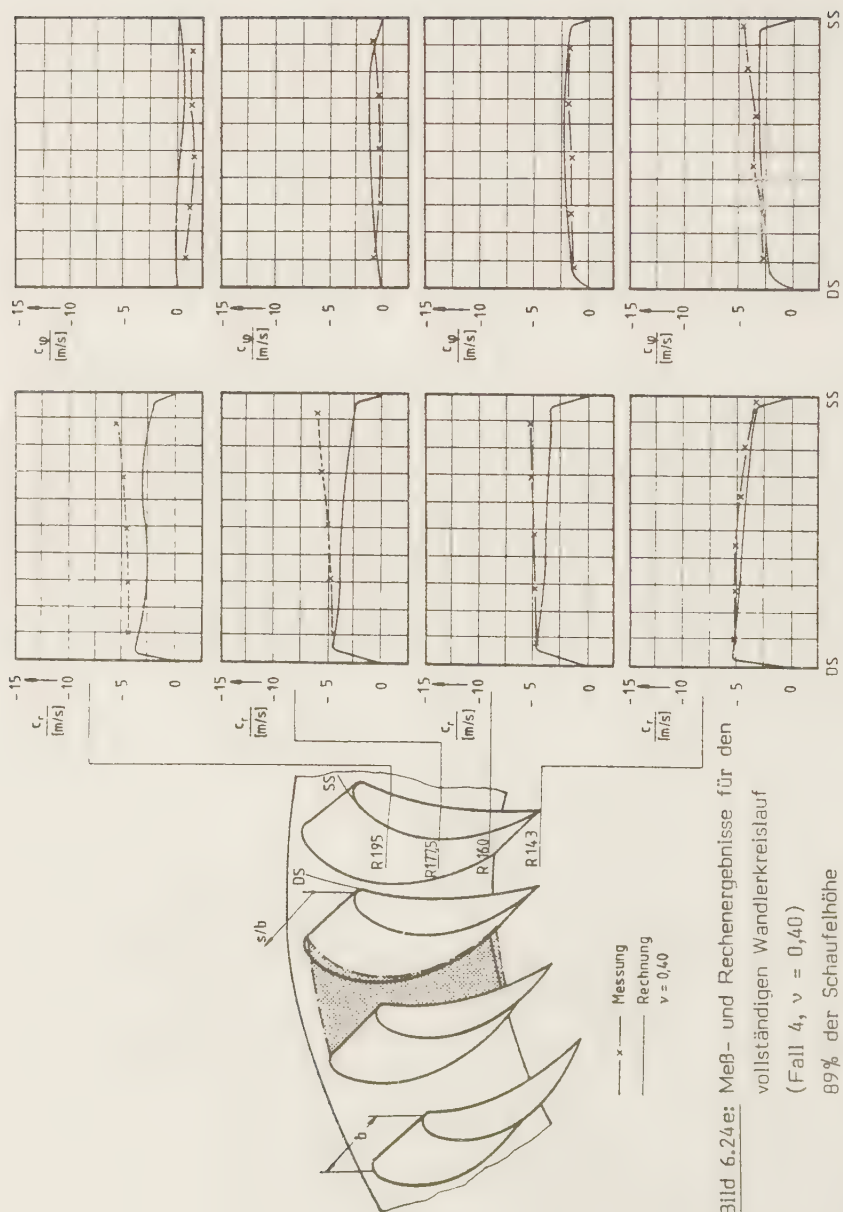


Bild 6.24e: Meß- und Rechenergebnisse für den vollständigen Wandlerkreislauf (Fall 4, $v = 0,40$) 89% der Schaufelhöhe

Die Messung bestätigt die berechneten Umfangskomponenten. Deutlich erkennt man für die Ebene R177,5 die radial ausgerichtete Strömung; in dieser Ebene verschwindet die Umfangsgeschwindigkeit über der Schaufelhöhe mit Ausnahme der direkten Nähe des Innen- und Außenkerns (vgl. Bild 6.25).

Berechnete Sekundärgeschwindigkeitskomponenten

Die berechneten Sekundärgeschwindigkeitskomponenten für die drei betrachteten Betriebspunkte des hydrodynamischen Wandlers sind in Bild 6.25 dargestellt, wobei die qualitativen Strömungsrichtungen in der Ein- und Austrittsebene durch Pfeile gekennzeichnet sind.

Für das zunehmend belastete Turbinenrad ($v = 0,40$) bildet sich in der Ebene R195 ein Doppelwirbel aus, der in der Nähe des Innenkerns ($s/b \rightarrow 1$) deutlich zu erkennen ist. Zentrifugalkräfte sorgen für eine Verlagerung des Geschwindigkeitsmaximums auf die konkave Schaufelseite. Gleichzeitig werden wandnahe Fluidteilchen sowohl in der Nähe des Innenkerns ($s/b \rightarrow 1$) als auch an der Außenschale ($s/b \rightarrow 0$) wegen des herrschenden Druckgradienten in Richtung konvexe Schaufelseite abgelenkt, so daß ein gegensinnig drehendes Wirbelpaar entsteht. In der Ebene R177,5 ist dieser Doppelwirbel noch zu erkennen, während er für die Ebenen R160 und R143 in den Rechenergebnissen nicht mehr nachzuweisen ist.

Für den Optimalpunkt mit nahezu schaufelkongruenter Anströmung ist der oben beschriebene Doppelwirbel ebenfalls in der Ebene R177,5 erkennbar, während der Doppelwirbel im Betriebspunkt $v = 0,70$ nur noch sehr schwach ausgebildet ist.

Trotz der recht großen Unterschiede in dem Geschwindigkeitsbild der Eintrittsebene (R217), stellt sich in der Austrittsebene (R143) unabhängig vom jeweiligen Betriebspunkt ein nahezu identisches Sekundärströmungsbild ein.

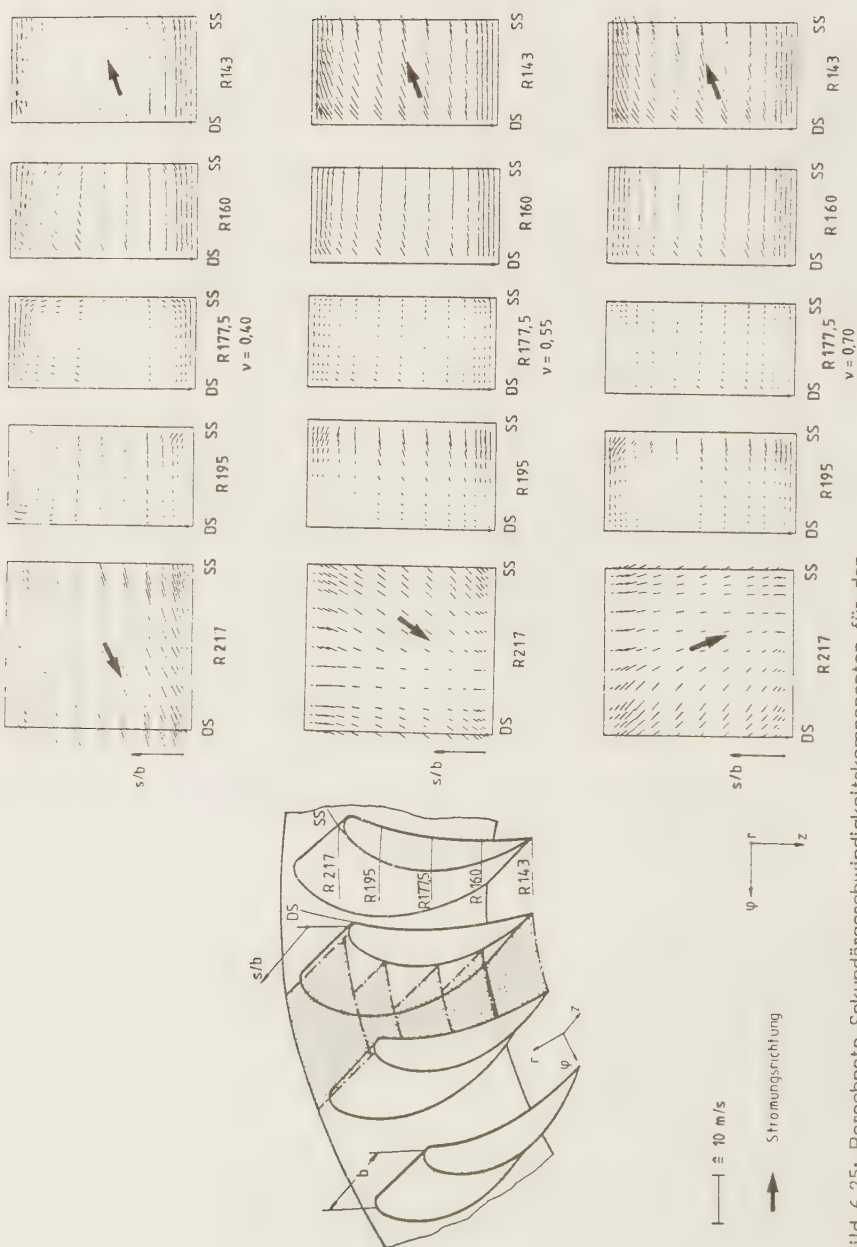


Bild 6.25: Berechnete Sekundärgeschwindigkeitskomponenten für den vollständigen Wandlerkreislauf (Fall 4, $v = 0,40$; Fall 3, $v = 0,55$; Fall 2, $v = 0,70$)

Ergebnisse der zweidimensionalen Strömungsrechnung

Für den vollständigen Wandlerkreislauf zeigt Bild 6.25 in einem mittleren Schaufelschnitt ($s/b = 0,5$) nur geringe axiale Geschwindigkeitskomponenten, weshalb die zweidimensionalen Untersuchungen in dieser Ebene erfolgt sind.

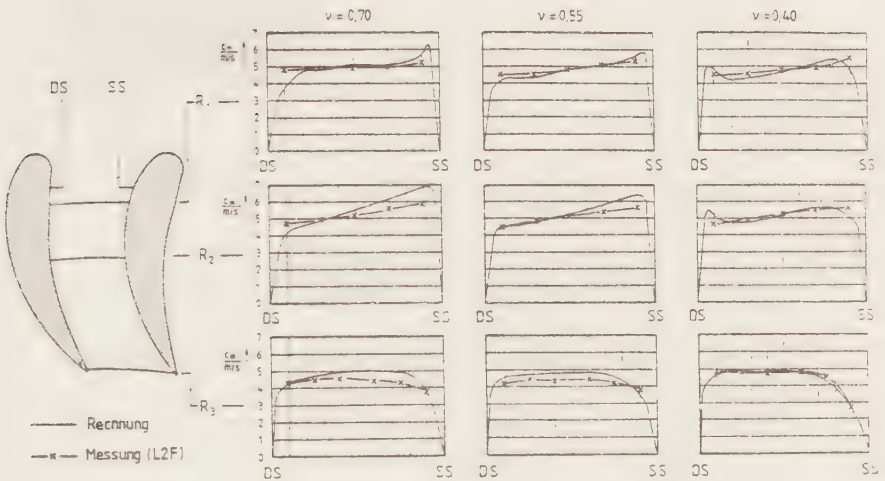


Bild 6.26: Gerechnete und gemessene Meridiangeschwindigkeiten im radialen Schaufelgitter

Unter Annahme einer ebenen Zuströmung sind in Bild 6.26 die berechneten und gemessenen Meridiangeschwindigkeitsverläufe für die Betriebspunkte $v_2 = 0,70$, $v_3 = 0,55$ und $v_4 = 0,40$ dargestellt. Es ergibt sich eine recht genaue Übereinstimmung zwischen Experiment und Rechnung.

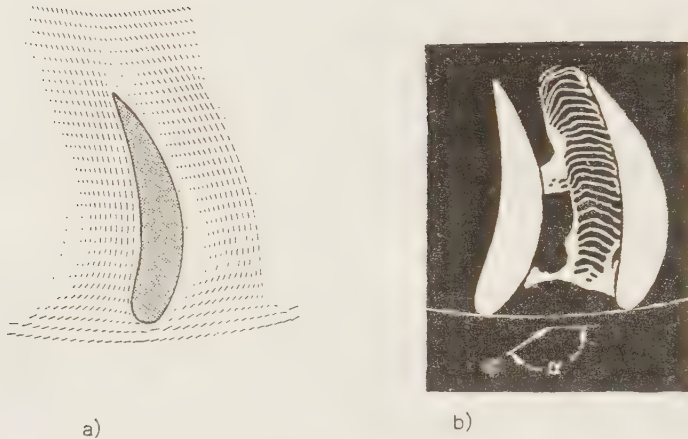


Bild 6.27: Die turbulente Strömung im radialen Schaufelgitter
(Anfahrpunkt; Fall 5: $v = 0,00$)

- a) vorausberechnete Geschwindigkeitsvektoren
- b) Funkenblitzgarden im Leitradkanal [12]

Bild 6.27a zeigt die vorausberechneten Geschwindigkeitsvektoren für den als Anfahrpunkt bezeichneten Betriebspunkt $v_5 = 0,00$. Auf der konvexen Schaufelseite ist deutlich ein großes Ablösegebiet zu erkennen, daß durch die Funkenblitzaufnahmen in diesem Betriebspunkt bestätigt wird (Bild 6.27b). Das Geschwindigkeitsmaximum befindet sich dabei auf der Schaufeldruckseite (konkave Schaufelfläche).

Gesamtdruckverluste

Eine Aussage über die im Leitrad entstehenden Verluste erhält man durch eine Analyse der Gesamtdruckverluste.

Der Gesamtdruckverlust Δp_G berechnet sich aus

$$\Delta p_G = \bar{p}_{GE} - \bar{p}_{GA}$$

Nach Zahn [8] werden bei der Bestimmung der mittleren Gesamtdrücke zweckmäßigerweise die Energieströme bilanziert. Dies erreicht man durch eine Wichtung der örtlichen Gesamtdrücke mit der zugehörigen Meridiangeschwindigkeit v_m :

$$p_G = \frac{1}{V} \int_A p_G \cdot v_m \, dA$$

Für den Gesamtdruck p_G eines inkompressiblen Fluids gilt:

$$p_G = p_{st} + \frac{\rho}{2} v^2$$

wenn p_{st} der statische Druck und v die örtliche Strömungsgeschwindigkeit ist.

Für die Strömungsfälle 2, 3 und 4 sind die Gesamtdruckverluste aus der dreidimensionalen Strömungsrechnung in Bild 6.28 eingetragen, während für den Anfahrpunkt (Fall 5, $v = 0,00$) der aus der zweidimensionalen Rechnung bestimmte Gesamtdruckverlust angegeben ist. Die berechneten Gesamtdruckverluste harmonisieren mit den aus Mehrlochsondenmessungen stammenden gemessenen Daten, die in Bild 6.28 durch eine Vollinie dargestellt sind.

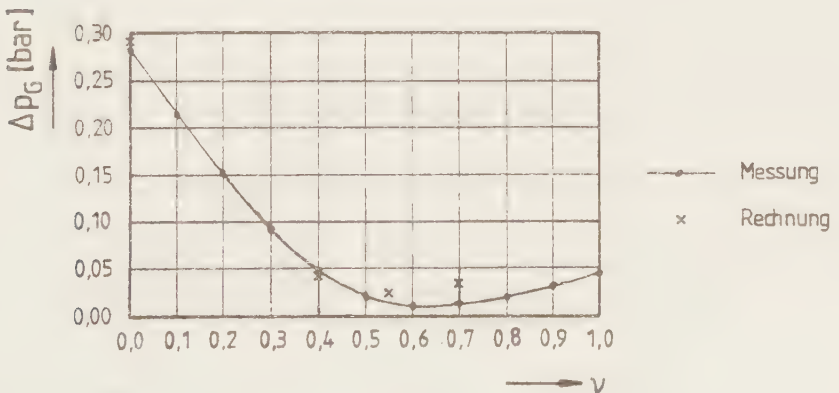


Bild 6.28: Gesamtdruckdifferenzen zwischen Leitradeintritt und Leitradaustritt

Bild 6.29 zeigt den Anstieg der Gesamtdruckverluste im Leitradkanal. Der örtliche Gesamtdruckverlust wird dabei auf den berechneten Gesamtdruckverlust des jeweiligen Betriebspunktes zwischen Ein- und Austrittsfläche bezogen und in Abhängigkeit der Kanallänge l_k aufgetragen. Der Ursprung der Koordinate l_k ist der Eintrittsebene (R217) zugeordnet, und der Eintritt in das radiale Schaufelgitter liegt bei ungefähr 7% der Kanallänge.

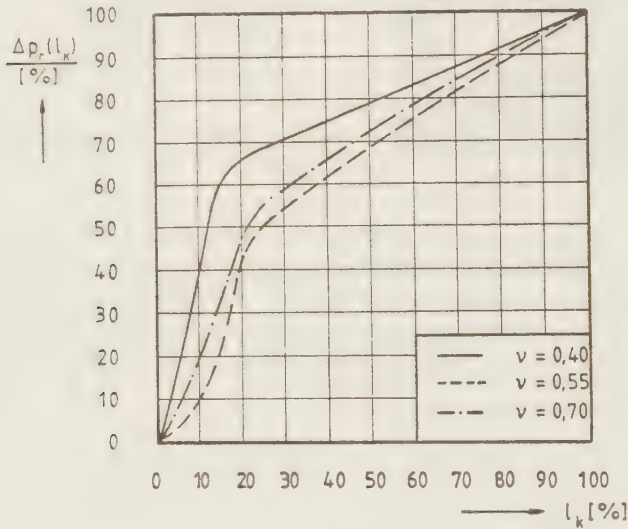


Bild 6.29: Anstieg der Gesamtdruckverluste im Leitradkanal für die Betriebspunkte $v_2 = 0,70$, $v_3 = 0,55$, $v_4 = 0,40$

In allen drei berechneten Strömungsfällen entstehen auf den ersten 25% der Kanallänge mindestens 50% des Gesamtdruckverlustes zwischen Ein- und Austrittsfläche. Im Fall der zunehmend belasteten Turbine ($v_4 = 0,40$) verursachen die ersten 25% der Kanallänge sogar 70% des Gesamtdruckverlustes!

Dieser beträchtliche Verlustanteil im Gebiet des Leitradeintritts ist zum einen auf die Fehlanströmung des Schaufelgitters und zum

anderen auf die erforderliche Angleichung des Geschwindigkeitsprofils an die Schaufelgeometrie zurückzuführen.

Dementsprechend steigt der Gesamtdruckverlust ungefähr ab der Ebene R 195 (dies entspricht etwa 30% der Kanallänge) linear an; dies ist mit dem Verhalten einer ausgebildeten Kanalströmung vergleichbar.

Bei der Strömung durch den Leitrادkanal bestätigt sich die Tatsache, daß der größte Teil der Verluste nicht durch Reibungseffekte, sondern durch Fehlanströmungen bzw. Profilumbildungen verursacht wird. Insbesondere im Fall der schaufelkongruenten Anströmung, wo absolut gesehen die geringsten Verluste auftreten, liefert der Bereich der Schaufeleintrittskante den größten Beitrag zum Gesamtverlust.

7. Zusammenfassung

Die ständig steigenden Anforderungen an die einzelnen Komponenten einer Turbomaschine erfordern schon in der Auslegungsphase genaue Kenntnisse der aerodynamischen Strömungsverhältnisse. Um eine Reduzierung der kostenaufwendigen Versuche an Prototypen zu erreichen, bemüht man sich, die traditionellen experimentellen Verfahren zunehmend durch moderne Rechenverfahren zu ersetzen.

Folgende Forderungen sind aufgrund der komplexen Strömungsverhältnisse in den einzelnen Bauelementen einer Fluidenergiemaschine an das Rechenmodell bzw. -verfahren zu stellen; es soll

- die dreidimensionale, turbulente Strömung nachbilden, wobei hier besonderes Interesse an der Berechnung der stationären Strömung besteht;
- hinreichende Stabilitäts- und Konvergenzeigenschaften aufweisen;
- befriedigende Genauigkeit bei geringer Stützstellenzahl gewährleisten;
- durch geringen Speicherbedarf und kurze Rechenzeiten infolge Einfachheit der resultierenden Differenzengleichungen wirtschaftlich arbeiten.

Ausgehend von den problembeschreibenden Gleichungen - der Navier-Stokes' schen Bewegungsgleichung und der Kontinuitätsgleichung - ist ein Rechenverfahren entwickelt worden, welches die oben aufgestellten Forderungen in allen Punkten erfüllt. Die Diskretisierung erfolgt mit Hilfe eines Finite-Volumen-Verfahrens, wobei die Gleichungen und die unbekannten Geschwindigkeitskomponenten in einem kartesischen Koordinatensystem beschrieben werden. Hierdurch ergeben sich einfache Ausgangsgleichungen mit übersichtlichen mathematischen Ausdrücken, wobei die strenge Erhaltung von Massen- und Impulsflüssen über die Zelloberflächen hinweg gewährleistet ist. Die Verwendung des Finite-Volumen-Verfahrens bei der Diskretisierung erlaubt außerdem

auch die einfache Berechnung der Strömungsvorgänge in allgemeinen krummlinigen Geometrien, ohne daß die problembeschreibenden Gleichungen z. B. in ein krummliniges, konturangepaßtes Koordinatensystem transformiert werden müssen. Vielmehr benötigt man als einzige geometrische Information für jeden Maschenpunkt jeweils drei Koordinatenwerte (x,y,z) . Auftretende turbulente Strömungsformen werden mit Hilfe der zeitlich gemittelten Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls und unter Verwendung eines einfachen Turbulenzmodells, dem Prandtl'schen Mischungswegansatz, berechnet.

Die Größe der auftretenden Probleme erfordert den Einsatz leistungsfähiger Größtrechenanlagen. Das Rechenverfahren zur Lösung der dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichung überfordert die Kapazität der meisten heute installierten Rechnersysteme. So können z. B. auf einer Cyber 855 des Rechenzentrums der Ruhr-Universität Bochum für den dreidimensionalen Fall höchstens 600 Zellen im Lösungsgebiet vorgesehen werden. Es ist also ersichtlich, daß sich die Kapazität herkömmlicher Rechner sehr schnell erschöpft. Als mögliche Alternative bietet sich die Nutzung der in neuester Zeit zur Verfügung stehenden Vektorrechner an, die neben ihrer speziellen Architektur auch größere und leistungsfähigere Speichereinheiten besitzen. Im Rechenzentrum der Ruhr-Universität Bochum wurde im Jahre 1982 ein mit einer Hauptspeicherkapazität von zwei Millionen Worten ausgestatteter Vektorrechner vom Typ Cyber 205 installiert.

Um die Leistungsfähigkeit der Cyber 205 in vollem Umfang nutzen zu können, erfordert die besondere Rechnerarchitektur dieser Anlage eine vollständige Vektorisierung des Programms. Durch die explizite Vektorisierung "von Hand" konnte für ein Testbeispiel die benötigte Rechenzeit um den Faktor 20 gegenüber der Cyber 855 verkürzt werden. Dies zeigt, daß durch die vorgenommenen Änderungen in der Programmierung eine gute Auslastung der Cyber 205 gewährleistet ist. Trotz des Vektorrechnereinsatzes betrugen die benötigten Rechenzeiten bei einer Auflösung des Rechengebietes in über 35000 Zellen noch zwischen zwei und vier CPU-Stunden.

Als Nachweis der Fehlerlosigkeit der Programmierung und des zugrunde-

gelegten Diskretisierungsverfahrens erfolgte zunächst ein Vergleich mit verschiedenen exakten Lösungen der Navier-Stokes-Gleichung. Hierbei zeigte sich eine gute Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen des Rechenverfahrens und den analytischen Werten.

Anschließend wurde das Verfahren zur Nachrechnung einer experimentellen Untersuchung der laminaren Strömung in einem 90° -Umlenkkanal benutzt. Auch hier zeigte sich eine befriedigende Übereinstimmung zwischen den vorausberechneten und den gemessenen Strömungsgrößen. Insbesondere wurden die auftretenden Sekundärströmungen gut wiedergegeben, was sich auch in der befriedigenden Übereinstimmung zwischen dem berechneten und dem aus einer empirischen Beziehung bestimmten Druckverlustbeiwert äußerte.

Abschließend erfolgte die Nachrechnung der Strömung im Leitrad eines hydrodynamischen Wandlers. Die erforderlichen Geschwindigkeitswerte in der Eintrittsebene wurden aus den Ergebnissen der experimentellen Untersuchungen von Adrian [12] vorgegeben. Die für fünf Betriebszustände durchgeführten numerischen Untersuchungen zeigten ebenfalls eine befriedigende Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung.

Die aus den Meß- und Rechenergebnissen bestimmten Totaldruckverluste des Leitrades harmonisierten miteinander. Hierbei zeigte sich, daß der im Leitrad auftretende Verlust in hohem Maße von der Form des Zuströmprofils abhängt. Weiterhin wurde ersichtlich, daß die Verluste im wesentlichen, und zwar unabhängig von der Form des Geschwindigkeitsprofils am Eintritt, im oberen Teil des Leitradkanals entstehen. Den Verlustanstieg in diesem Bereich verursachten sowohl die großen Fehlanströmungen als auch die hohen Geschwindigkeiten und die großen Geschwindigkeitsgradienten mit dementsprechenden Schubspannungen.

Die Ergebnisse des Rechenverfahrens können durch den Einsatz eines höherwertigen Turbulenzmodells weiter verbessert werden. Da man bei diesen Modellen im allgemeinen ebenfalls eine turbulente Scheinviskosität bestimmt, ist ein Einbeziehen eines solchen Modells ohne grundsätzliche Änderung des Basisverfahrens in das Lösungsverfahren möglich.

Andererseits müssen bei dem Einsatz der höherwertigen Turbulenzmodelle beträchtliche Steigerungen in der beanspruchten Rechnerkapazität in Kauf genommen werden, so daß stets eine sorgfältige Abwägung zwischen benötigter Genauigkeit der Ergebnisse und dem erforderlichen Aufwand notwendig ist.

Aus der Vorgabe des Profils der Eintrittsgeschwindigkeit läßt sich mit Hilfe des Verfahrens für eine bestimmte Geometrie das Geschwindigkeits- und das Druckfeld im gesamten Lösungsgebiet berechnen. Auf der Basis dieser Informationen können dann Auslegungsentscheidungen getroffen und ihre Wirksamkeit durch eine erneute Rechnung relativ schnell und kostengünstig überprüft werden.

Anhang A1: Vollständige Darstellung der Differenzengleichungen

In diesem Abschnitt sollen die vollständigen Differenzengleichungen für die drei Phasen des Lösungsalgorithmus dargestellt werden, und zwar für jede einzelne Geschwindigkeitskomponente. Allerdings werden insbesondere für die Phase 1 die umfangreichen Approximationen der Oberflächenintegrale nur für die x-Richtung exemplarisch angegeben. Je nach laminarem oder turbulentem Strömungszustand ist für die dynamische Zähigkeit μ entweder der konstante Stoffwert oder die örtlich veränderliche, aber in einem Kontrollraum als konstant angesehene Summe aus der Viskosität des Fluids und der Scheinviskosität infolge der turbulenten Schwankungsbewegung zu verstehen.

Die Differenzengleichungen der Phase 1

Das während der Phase 1 zu lösende Gleichungssystem ist durch

$$\frac{d}{dt} \int_{V'} \rho \vec{u} \, dV' + \int_{A'} \vec{n}' \cdot p \cdot \underline{\underline{I}} \, dA' - \int_{A'} [\vec{n}' \cdot \underline{\underline{g}}] \, dA' = 0$$

gegeben, wenn die Auswirkungen von volumenhaft verteilt angreifenden Kräften auf das Geschwindigkeitsfeld vernachlässigt werden.

Die zeitliche Änderung der Impulsdichte ($\rho \vec{u}$) wird durch

$$\frac{d}{dt} \int_{V'} \rho \vec{u} \, dV' = \frac{\rho V'_{ijk} (\vec{u}_{ijk}^{**} - \vec{u}_{ijk}^n)}{\delta t}$$

beschrieben. Hierbei nimmt man an, daß die Werte für ρ und $\vec{u}$ im jeweiligen Knoten einen repräsentativen Mittelwert für das Kontrollvolumen darstellen. Die Hochindizes "*)" und "n" kennzeichnen die durch den Zeitschritt δt getrennten Zeitebenen.

Für das Skalarprodukt $[\vec{n}' \cdot \underline{p} \cdot \underline{I}]$ ergibt sich nach den Regeln der Tensorrechnung:

$$\begin{aligned}
 [\vec{n}' \cdot \underline{p} \cdot \underline{I}] &= p [\vec{n}' \cdot \underline{I}] \\
 &= p \left[\left\{ \sum_i \vec{\delta}_i n'_i \right\} \left\{ \sum_j \sum_k \vec{\delta}_j \vec{\delta}_k \delta_{jk} \right\} \right] \\
 &= p \sum_i \sum_j \sum_k [\vec{\delta}_i \cdot \vec{\delta}_j \vec{\delta}_k] n'_i \delta_{jk} \\
 &= p \sum_i \sum_j \sum_k \delta_{ij} \cdot \vec{\delta}_k n'_i \delta_{jk} \\
 &= p \sum_i \sum_k \delta_{ik} n'_i \vec{\delta}_k = p \sum_k \vec{\delta}_k n'_k = p \vec{n}'
 \end{aligned}$$

Das Oberflächenintegral

$$\int_{A'} p \vec{n}' dA'$$

wird gemäß Abschnitt 3.2.3.1 für die x-Richtung durch folgende Summe approximiert:

$$\begin{aligned}
 \vec{i} \cdot \int_{A'} p \vec{n}' dA' &= \\
 &= \frac{1}{4} \{ p_{ijk} [+A_{1x}|_{ijk} + A_{fx}|_{ijk} + A_{bx}|_{ijk}] \\
 &\quad + p_{imjk} [-A_{1x}|_{ijk} + A_{fx}|_{imjk} + A_{bx}|_{imjk}] \\
 &\quad + p_{imjmk} [-A_{1x}|_{ijmk} - A_{fx}|_{imjk} + A_{bx}|_{imjmk}] \\
 &\quad + p_{ijmk} [+A_{1x}|_{ijmk} - A_{fx}|_{ijk} + A_{bx}|_{ijmk}] \\
 &\quad + p_{ijkm} [+A_{1x}|_{ijkm} + A_{fx}|_{ijkm} - A_{bx}|_{ijk}] \\
 &\quad + p_{imjkm} [-A_{1x}|_{ijkm} + A_{fx}|_{imjkm} - A_{bx}|_{imjk}] \\
 &\quad + p_{imjmk} [-A_{1x}|_{ijmk} - A_{fx}|_{imjkm} - A_{bx}|_{imjmk}] \\
 &\quad + p_{ijmk} [+A_{1x}|_{ijmk} - A_{fx}|_{ijkm} - A_{bx}|_{ijmk}] \}
 \end{aligned}$$

Die Auswirkung diffusiver Transportvorgänge ist durch

$$\int_{A'} [\vec{n}' \cdot \underline{g}] dA' = \sum_{\alpha=1}^{24} [\vec{n}'_{\alpha} \cdot \underline{g}] \delta A'_{\alpha}$$

gegeben. Mit

$$\begin{aligned} [\vec{n}' \cdot \underline{g}] &= \sum_i \vec{e}_i \left\{ \sum_j \sigma_{ij} \cdot n'_j \right\} \\ &= \vec{i} \{ \sigma_{xx} \cdot n'_x + \sigma_{xy} \cdot n'_y + \sigma_{xz} \cdot n'_z \} \\ &\quad + \vec{j} \{ \sigma_{yx} \cdot n'_x + \sigma_{yy} \cdot n'_y + \sigma_{yz} \cdot n'_z \} \\ &\quad + \vec{k} \{ \sigma_{zx} \cdot n'_x + \sigma_{zy} \cdot n'_y + \sigma_{zz} \cdot n'_z \} \end{aligned}$$

ergibt sich für die x-Richtung

$$\begin{aligned} \vec{i} \cdot \int_{A'} [\vec{n}' \cdot \underline{g}] dA' &= \\ &\sigma_{xx}|_{ijk} \cdot (n'_{x_1} \cdot \delta A'_1 + n'_{x_2} \cdot \delta A'_2 + n'_{x_3} \cdot \delta A'_3) \\ &+ \sigma_{xy}|_{ijk} \cdot (n'_{y_1} \cdot \delta A'_1 + n'_{y_2} \cdot \delta A'_2 + n'_{y_3} \cdot \delta A'_3) \\ &+ \sigma_{xz}|_{ijk} \cdot (n'_{z_1} \cdot \delta A'_1 + n'_{z_2} \cdot \delta A'_2 + n'_{z_3} \cdot \delta A'_3) \\ &+ \sigma_{xx}|_{imjk} \cdot (n'_{x_4} \cdot \delta A'_4 + n'_{x_5} \cdot \delta A'_5 + n'_{x_6} \cdot \delta A'_6) \\ &+ \sigma_{xy}|_{imjk} \cdot (n'_{y_4} \cdot \delta A'_4 + n'_{y_5} \cdot \delta A'_5 + n'_{y_6} \cdot \delta A'_6) \\ &+ \sigma_{xz}|_{imjk} \cdot (n'_{z_4} \cdot \delta A'_4 + n'_{z_5} \cdot \delta A'_5 + n'_{z_6} \cdot \delta A'_6) \\ &+ \sigma_{xx}|_{imjmk} \cdot (n'_{x_7} \cdot \delta A'_7 + n'_{x_8} \cdot \delta A'_8 + n'_{x_9} \cdot \delta A'_9) \\ &+ \sigma_{xy}|_{imjmk} \cdot (n'_{y_7} \cdot \delta A'_7 + n'_{y_8} \cdot \delta A'_8 + n'_{y_9} \cdot \delta A'_9) \\ &+ \sigma_{xz}|_{imjmk} \cdot (n'_{z_7} \cdot \delta A'_7 + n'_{z_8} \cdot \delta A'_8 + n'_{z_9} \cdot \delta A'_9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sigma_{xx} | ijkm \cdot (n'_{x10} \cdot \delta A'_{10} + n'_{x11} \cdot \delta A'_{11} + n'_{x12} \cdot \delta A'_{12}) \\
 & - \sigma_{xy} | ijkm \cdot (n'_{y10} \cdot \delta A'_{10} + n'_{y11} \cdot \delta A'_{11} + n'_{y12} \cdot \delta A'_{12}) \\
 & + \sigma_{xz} | ijkm \cdot (n'_{z10} \cdot \delta A'_{10} + n'_{z11} \cdot \delta A'_{11} + n'_{z12} \cdot \delta A'_{12}) \\
 & - \sigma_{xx} | i jkm \cdot (n'_{x13} \cdot \delta A'_{13} + n'_{x14} \cdot \delta A'_{14} + n'_{x15} \cdot \delta A'_{15}) \\
 & + \sigma_{xy} | i jkm \cdot (n'_{y13} \cdot \delta A'_{13} + n'_{y14} \cdot \delta A'_{14} + n'_{y15} \cdot \delta A'_{15}) \\
 & + \sigma_{xz} | i jkm \cdot (n'_{z13} \cdot \delta A'_{13} + n'_{z14} \cdot \delta A'_{14} + n'_{z15} \cdot \delta A'_{15}) \\
 & + \sigma_{xx} | im jkm \cdot (n'_{x16} \cdot \delta A'_{16} + n'_{x17} \cdot \delta A'_{17} + n'_{x18} \cdot \delta A'_{18}) \\
 & + \sigma_{xy} | im jkm \cdot (n'_{y16} \cdot \delta A'_{16} + n'_{y17} \cdot \delta A'_{17} + n'_{y18} \cdot \delta A'_{18}) \\
 & + \sigma_{xz} | im jkm \cdot (n'_{z16} \cdot \delta A'_{16} + n'_{z17} \cdot \delta A'_{17} + n'_{z18} \cdot \delta A'_{18}) \\
 & + \sigma_{xx} | im j mkm \cdot (n'_{x19} \cdot \delta A'_{19} + n'_{x20} \cdot \delta A'_{20} + n'_{x21} \cdot \delta A'_{21}) \\
 & + \sigma_{xy} | im j mkm \cdot (n'_{y19} \cdot \delta A'_{19} + n'_{y20} \cdot \delta A'_{20} + n'_{y21} \cdot \delta A'_{21}) \\
 & + \sigma_{xz} | im j mkm \cdot (n'_{z19} \cdot \delta A'_{19} + n'_{z20} \cdot \delta A'_{20} + n'_{z21} \cdot \delta A'_{21}) \\
 & + \sigma_{xx} | i j mkm \cdot (n'_{x22} \cdot \delta A'_{22} + n'_{x23} \cdot \delta A'_{23} + n'_{x24} \cdot \delta A'_{24}) \\
 & + \sigma_{xy} | i j mkm \cdot (n'_{y22} \cdot \delta A'_{22} + n'_{y23} \cdot \delta A'_{23} + n'_{y24} \cdot \delta A'_{24}) \\
 & + \sigma_{xz} | i j mkm \cdot (n'_{z22} \cdot \delta A'_{22} + n'_{z23} \cdot \delta A'_{23} + n'_{z24} \cdot \delta A'_{24})
 \end{aligned}$$

Da die Produktsummen auf der rechten Seite nicht direkt berechenbar sind, werden sie durch die entsprechenden Komponenten der einer regulären Zelle zugeordneten Normalenvektoren ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \vec{i} \cdot \int_{\Delta A'} [\vec{r}' \cdot \underline{\underline{\sigma}}] d\Delta A' = \\ - \frac{1}{2} \{ \sigma_{xx}|_{ijk} \cdot [+ A_{1x}|_{ijk} + A_{fx}|_{ijk} + A_{bx}|_{ijk}] \\ + \sigma_{xy}|_{ijk} \cdot [+ A_{1y}|_{ijk} + A_{fy}|_{ijk} - A_{by}|_{ijk}] \\ + \sigma_{xz}|_{ijk} \cdot [+ A_{1z}|_{ijk} + A_{fz}|_{ijk} + A_{bz}|_{ijk}] \\ - \sigma_{xx}|_{imjk} \cdot [- A_{1x}|_{ijk} + A_{fx}|_{imjk} + A_{bx}|_{imjk}] \\ - \sigma_{xy}|_{imjk} \cdot [- A_{1y}|_{ijk} + A_{fy}|_{imjk} + A_{by}|_{imjk}] \\ - \sigma_{xz}|_{imjk} \cdot [- A_{1z}|_{ijk} + A_{fz}|_{imjk} + A_{bz}|_{imjk}] \\ - \sigma_{xx}|_{imjmk} \cdot [- A_{1x}|_{ijmk} - A_{fx}|_{imjk} + A_{bx}|_{imjmk}] \\ - \sigma_{xy}|_{imjmk} \cdot [- A_{1y}|_{ijmk} - A_{fy}|_{imjk} + A_{by}|_{imjmk}] \\ - \sigma_{xz}|_{imjmk} \cdot [- A_{1z}|_{ijmk} - A_{fz}|_{imjk} - A_{bz}|_{imjmk}] \\ + \sigma_{xx}|_{ijmk} \cdot [+ A_{1x}|_{ijmk} - A_{fx}|_{ijk} + A_{bx}|_{ijmk}] \\ + \sigma_{xy}|_{ijmk} \cdot [+ A_{1y}|_{ijmk} - A_{fy}|_{ijk} + A_{by}|_{ijmk}] \\ + \sigma_{xz}|_{ijmk} \cdot [+ A_{1z}|_{ijmk} - A_{fz}|_{ijk} + A_{bz}|_{ijmk}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sigma_{xx}|_{ijkm} \cdot [+ A_{1x}|_{ijkm} + A_{fx}|_{ijkm} - A_{bx}|_{ijk}] \\
 & + \sigma_{xy}|_{ijkm} \cdot [+ A_{1y}|_{ijkm} + A_{fy}|_{ijkm} - A_{by}|_{ijk}] \\
 & + \sigma_{xz}|_{ijkm} \cdot [+ A_{1z}|_{ijkm} + A_{fz}|_{ijkm} - A_{bz}|_{ijk}] \\
 & + \sigma_{xx}|_{imjkm} \cdot [- A_{1x}|_{imjkm} + A_{fx}|_{imjkm} - A_{bx}|_{imjk}] \\
 & + \sigma_{xy}|_{imjkm} \cdot [- A_{1y}|_{imjkm} + A_{fy}|_{imjkm} - A_{by}|_{imjk}] \\
 & + \sigma_{xz}|_{imjkm} \cdot [- A_{1z}|_{imjkm} + A_{fz}|_{imjkm} - A_{bz}|_{imjk}] \\
 & + \sigma_{xx}|_{imjmk} \cdot [- A_{1x}|_{imjmk} - A_{fx}|_{imjmk} - A_{bx}|_{imjmk}] \\
 & + \sigma_{xy}|_{imjmk} \cdot [- A_{1y}|_{imjmk} - A_{fy}|_{imjmk} - A_{by}|_{imjmk}] \\
 & + \sigma_{xz}|_{imjmk} \cdot [- A_{1z}|_{imjmk} - A_{fz}|_{imjmk} - A_{bz}|_{imjmk}] \\
 & + \sigma_{xx}|_{ijmkm} \cdot [+ A_{1x}|_{ijmkm} - A_{fx}|_{ijkm} - A_{bx}|_{ijmk}] \\
 & + \sigma_{xy}|_{ijmkm} \cdot [+ A_{1y}|_{ijmkm} - A_{fy}|_{ijkm} - A_{by}|_{ijmk}] \\
 & + \sigma_{xz}|_{ijmkm} \cdot [+ A_{1z}|_{ijmkm} - A_{fz}|_{ijkm} - A_{bz}|_{ijmk}]
 \end{aligned}$$

Beim Übergang zu einer zellorientierten Betrachtungsweise, ergeben sich für die in Phase I berücksichtigten Einflüsse auf das Geschwindigkeitsfeld

in x-Richtung

$$u^{**}(i1) = u^n(i1)$$

$$- \frac{1}{4} \frac{\delta t}{MV(i1)} \cdot \{ - p(i4) \cdot [- A_{1x}(i1) + A_{fx}(i4) + A_{bx}(i4)] \\ + \sigma_{xx}(i4) \cdot [- A_{1x}(i1) + A_{fx}(i4) + A_{bx}(i4)] \\ + \sigma_{xy}(i4) \cdot [- A_{1y}(i1) + A_{fy}(i4) + A_{by}(i4)] \\ + \sigma_{xz}(i4) \cdot [- A_{1z}(i1) + A_{fz}(i4) + A_{bz}(i4)] \}$$

$$u^{**}(i2) = u^n(i2)$$

$$- \frac{1}{4} \frac{\delta t}{MV(i2)} \cdot \{ - p(i4) \cdot [- A_{1x}(i1) - A_{fx}(i3) + A_{bx}(i4)] \\ + \sigma_{xx}(i4) \cdot [- A_{1x}(i1) - A_{fx}(i3) + A_{bx}(i4)] \\ + \sigma_{xy}(i4) \cdot [- A_{1y}(i1) - A_{fy}(i3) + A_{by}(i4)] \\ + \sigma_{xz}(i4) \cdot [- A_{1z}(i1) - A_{fz}(i3) + A_{bz}(i4)] \}$$

$$u^{**}(i3) = u^n(i3)$$

$$- \frac{1}{4} \frac{\delta t}{MV(i3)} \cdot \{ - p(i4) \cdot [+ A_{1x}(i4) - A_{fx}(i3) - A_{bx}(i4)] \\ + \sigma_{xx}(i4) \cdot [+ A_{1x}(i4) - A_{fx}(i3) + A_{bx}(i4)] \\ + \sigma_{xy}(i4) \cdot [+ A_{1y}(i4) - A_{fy}(i3) + A_{by}(i4)] \\ + \sigma_{xz}(i4) \cdot [+ A_{1z}(i4) - A_{fz}(i3) + A_{bz}(i4)] \}$$

$$u^{**}(i4) = u^n(i4)$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{4} \frac{\delta t}{MV(i4)} \cdot \{ - r(i4) \cdot [+ A_{lx}(i4) + A_{fx}(i4) + A_{bx}(i4)] \\
 & + \sigma_{xx}(i4) \cdot [+ A_{lx}(i4) + A_{fx}(i4) + A_{bx}(i4)] \\
 & + \sigma_{xy}(i4) \cdot [+ A_{ly}(i4) + A_{fy}(i4) + A_{by}(i4)] \\
 & + \sigma_{xz}(i4) \cdot [+ A_{lz}(i4) + A_{fz}(i4) + A_{bz}(i4)] \}
 \end{aligned}$$

$$u^{**}(i5) = u^r(i5)$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{4} \frac{\delta t}{MV(i5)} \cdot \{ - r(i4) \cdot [- A_{lx}(i1) + A_{fx}(i4) - A_{bx}(i8)] \\
 & + \sigma_{xx}(i4) \cdot [- A_{lx}(i1) + A_{fx}(i4) - A_{bx}(i8)] \\
 & + \sigma_{xy}(i4) \cdot [- A_{ly}(i1) + A_{fy}(i4) - A_{by}(i8)] \\
 & + \sigma_{xz}(i4) \cdot [- A_{lz}(i1) + A_{fz}(i4) - A_{bz}(i8)] \}
 \end{aligned}$$

$$u^{**}(i6) = u^n(i6)$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{4} \frac{\delta t}{MV(i6)} \cdot \{ - p(i4) \cdot [- A_{lx}(i1) - A_{fx}(i3) - A_{bx}(i8)] \\
 & + \sigma_{xx}(i4) \cdot [- A_{lx}(i1) - A_{fx}(i3) - A_{bx}(i8)] \\
 & + \sigma_{xy}(i4) \cdot [- A_{ly}(i1) - A_{fy}(i3) - A_{by}(i8)] \\
 & + \sigma_{xz}(i4) \cdot [- A_{lz}(i1) - A_{fz}(i3) - A_{bz}(i8)] \}
 \end{aligned}$$

$$u^{**}(i7) = u^n(i7)$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{4} \frac{\delta t}{MV(i7)} \cdot \{ - p(i4) \cdot [+ A_{lx}(i4) - A_{fx}(i3) - A_{bx}(i8)] \\
 & + \sigma_{xx}(i4) \cdot [+ A_{lx}(i4) - A_{fx}(i3) - A_{bx}(i8)] \\
 & + \sigma_{xy}(i4) \cdot [+ A_{ly}(i4) - A_{fy}(i3) - A_{by}(i8)] \\
 & + \sigma_{xz}(i4) \cdot [+ A_{lz}(i4) - A_{fz}(i3) - A_{bz}(i8)] \}
 \end{aligned}$$

$$u^{**}(i8) = u^n(i8)$$

$$\begin{aligned}
 - \frac{1}{4} \frac{\delta t}{MV(i8)} \cdot \{ & - p(i4) \cdot [+ A_{1x}(i4) + A_{fx}(i4) - A_{bx}(i8)] \\
 & + \sigma_{xx}(i4) \cdot [+ A_{1x}(i4) + A_{fx}(i4) - A_{bx}(i8)] \\
 & + \sigma_{xy}(i4) \cdot [+ A_{1y}(i4) + A_{fy}(i4) - A_{by}(i8)] \\
 & + \sigma_{xz}(i4) \cdot [+ A_{1z}(i4) + A_{fz}(i4) - A_{bz}(i8)] \}
 \end{aligned}$$

in y-Richtung

$$v^{**}(i1) = v^n(i1)$$

$$\begin{aligned}
 - \frac{1}{4} \frac{\delta t}{MV(i1)} \cdot \{ & - p(i4) \cdot [- A_{1y}(i1) + A_{fy}(i4) + A_{by}(i4)] \\
 & + \sigma_{yx}(i4) \cdot [- A_{1x}(i1) + A_{fx}(i4) + A_{bx}(i4)] \\
 & + \sigma_{yy}(i4) \cdot [- A_{1y}(i1) + A_{fy}(i4) + A_{by}(i4)] \\
 & + \sigma_{yz}(i4) \cdot [- A_{1z}(i1) + A_{fz}(i4) + A_{bz}(i4)] \}
 \end{aligned}$$

$$v^{**}(i2) = v^n(i2)$$

$$\begin{aligned}
 - \frac{1}{4} \frac{\delta t}{MV(i2)} \cdot \{ & - p(i4) \cdot [- A_{1y}(i1) - A_{fy}(i3) + A_{by}(i4)] \\
 & + \sigma_{yx}(i4) \cdot [- A_{1x}(i1) - A_{fx}(i3) + A_{bx}(i4)] \\
 & + \sigma_{yy}(i4) \cdot [- A_{1y}(i1) - A_{fy}(i3) + A_{by}(i4)] \\
 & + \sigma_{yz}(i4) \cdot [- A_{1z}(i1) - A_{fz}(i3) + A_{bz}(i4)] \}
 \end{aligned}$$

$$v^{**}(i3) = v^n(i3)$$

$$\begin{aligned}
 - \frac{1}{4} \frac{\delta t}{MV(i3)} \cdot \{ & - p(i4) \cdot [+ A_{1y}(i4) - A_{fy}(i3) + A_{by}(i4)] \\
 & + \sigma_{yx}(i4) \cdot [+ A_{1x}(i4) - A_{fx}(i3) + A_{bx}(i4)] \\
 & + \sigma_{yy}(i4) \cdot [+ A_{1y}(i4) - A_{fy}(i3) + A_{by}(i4)] \\
 & + \sigma_{yz}(i4) \cdot [+ A_{1z}(i4) - A_{fz}(i3) + A_{bz}(i4)] \}
 \end{aligned}$$

$$v^{**}(i4) = v^n(i4)$$

$$= \frac{1}{4} \frac{\delta t}{MV(i4)} \cdot \{ - p(i4) \cdot [+ A_{1x}(i4) + A_{fx}(i4) + A_{bx}(i4)] \\ + \sigma_{yx}(i4) \cdot [+ A_{1x}(i4) + A_{fx}(i4) + A_{bx}(i4)] \\ + \sigma_{yy}(i4) \cdot [+ A_{1y}(i4) + A_{fy}(i4) + A_{by}(i4)] \\ + \sigma_{yz}(i4) \cdot [+ A_{1z}(i4) + A_{fz}(i4) + A_{bz}(i4)] \}$$

$$v^{**}(i5) = v^n(i5)$$

$$= \frac{1}{4} \frac{\delta t}{MV(i5)} \cdot \{ - p(i4) \cdot [- A_{1x}(i1) + A_{fx}(i4) - A_{bx}(i8)] \\ + \sigma_{yx}(i4) \cdot [- A_{1x}(i1) + A_{fx}(i4) - A_{bx}(i8)] \\ + \sigma_{yy}(i4) \cdot [- A_{1y}(i1) + A_{fy}(i4) - A_{by}(i8)] \\ + \sigma_{yz}(i4) \cdot [- A_{1z}(i1) + A_{fz}(i4) - A_{bz}(i8)] \}$$

$$v^{**}(i6) = v^n(i6)$$

$$= \frac{1}{4} \frac{\delta t}{MV(i6)} \cdot \{ - p(i4) \cdot [- A_{1x}(i1) - A_{fx}(i3) - A_{bx}(i8)] \\ + \sigma_{yx}(i4) \cdot [- A_{1x}(i1) - A_{fx}(i3) - A_{bx}(i8)] \\ + \sigma_{yy}(i4) \cdot [- A_{1y}(i1) - A_{fy}(i3) - A_{by}(i8)] \\ + \sigma_{yz}(i4) \cdot [- A_{1z}(i1) - A_{fz}(i3) - A_{bz}(i8)] \}$$

$$v^{**}(i7) = v^n(i7)$$

$$= \frac{1}{4} \frac{\delta t}{MV(i7)} \cdot \{ - p(i4) \cdot [+ A_{1x}(i4) - A_{fx}(i3) - A_{bx}(i8)] \\ + \sigma_{yx}(i4) \cdot [+ A_{1x}(i4) - A_{fx}(i3) - A_{bx}(i8)] \\ + \sigma_{yy}(i4) \cdot [+ A_{1y}(i4) - A_{fy}(i3) - A_{by}(i8)] \\ + \sigma_{yz}(i4) \cdot [+ A_{1z}(i4) - A_{fz}(i3) - A_{bz}(i8)] \}$$

$$v^{**}(i8) = v^n(i8)$$

$$\begin{aligned}
 - \frac{1}{4} \frac{\delta t}{MV(i8)} \cdot \{ & - p(i4) \cdot [+ A_{ly}(i4) + A_{fy}(i4) - A_{by}(i4)] \\
 & + \sigma_{yx}(i4) \cdot [+ A_{lx}(i4) + A_{fx}(i4) - A_{bx}(i8)] \\
 & + \sigma_{yy}(i4) \cdot [+ A_{ly}(i4) + A_{fy}(i4) - A_{by}(i8)] \\
 & + \sigma_{yz}(i4) \cdot [+ A_{lz}(i4) + A_{fz}(i4) - A_{bz}(i8)] \}
 \end{aligned}$$

in z-Richtung

$$w^{**}(i1) = w^n(i1)$$

$$\begin{aligned}
 - \frac{1}{4} \frac{\delta t}{MV(i1)} \cdot \{ & - p(i4) \cdot [- A_{lz}(i1) + A_{fz}(i4) + A_{bz}(i4)] \\
 & + \sigma_{zx}(i4) \cdot [- A_{lx}(i1) + A_{fx}(i4) + A_{bx}(i4)] \\
 & + \sigma_{zy}(i4) \cdot [- A_{ly}(i1) + A_{fy}(i4) + A_{by}(i4)] \\
 & + \sigma_{zz}(i4) \cdot [- A_{lz}(i1) + A_{fz}(i4) + A_{bz}(i4)] \}
 \end{aligned}$$

$$w^{**}(i2) = w^n(i2)$$

$$\begin{aligned}
 - \frac{1}{4} \frac{\delta t}{MV(i2)} \cdot \{ & - p(i4) \cdot [- A_{lz}(i1) - A_{fz}(i3) + A_{bz}(i4)] \\
 & + \sigma_{zx}(i4) \cdot [- A_{lx}(i1) - A_{fx}(i3) + A_{bx}(i4)] \\
 & + \sigma_{zy}(i4) \cdot [- A_{ly}(i1) - A_{fy}(i3) + A_{by}(i4)] \\
 & + \sigma_{zz}(i4) \cdot [- A_{lz}(i1) - A_{fz}(i3) + A_{bz}(i4)] \}
 \end{aligned}$$

$$w^{**}(i3) = w^n(i3)$$

$$\begin{aligned}
 - \frac{1}{4} \frac{\delta t}{MV(i3)} \cdot \{ & - p(i4) \cdot [+ A_{lz}(i4) - A_{fz}(i3) + A_{bz}(i4)] \\
 & + \sigma_{zx}(i4) \cdot [+ A_{lx}(i4) - A_{fx}(i3) + A_{bx}(i4)] \\
 & + \sigma_{zy}(i4) \cdot [+ A_{ly}(i4) - A_{fy}(i3) + A_{by}(i4)] \\
 & + \sigma_{zz}(i4) \cdot [+ A_{lz}(i4) - A_{fz}(i3) + A_{bz}(i4)] \}
 \end{aligned}$$

$$w^{**}(i4) = w^n(i4)$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{4} \frac{\delta t}{MV(i4)} \cdot \{ - p(i4) \cdot [+ A_{1z}(i4) + A_{fz}(i4) + A_{bz}(i4)] \\
 & + \sigma_{zx}(i4) \cdot [+ A_{1x}(i4) + A_{fx}(i4) + A_{bx}(i4)] \\
 & + \sigma_{zy}(i4) \cdot [+ A_{1y}(i4) + A_{fy}(i4) + A_{by}(i4)] \\
 & + \sigma_{zz}(i4) \cdot [+ A_{1z}(i4) + A_{fz}(i4) + A_{bz}(i4)] \}
 \end{aligned}$$

$$w^{**}(i5) = w^n(i5)$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{4} \frac{\delta t}{MV(i5)} \cdot \{ - p(i4) \cdot [- A_{1z}(i1) + A_{fz}(i4) - A_{bz}(i8)] \\
 & + \sigma_{zx}(i4) \cdot [- A_{1x}(i1) + A_{fx}(i4) - A_{bx}(i8)] \\
 & + \sigma_{zy}(i4) \cdot [- A_{1y}(i1) + A_{fy}(i4) - A_{by}(i8)] \\
 & + \sigma_{zz}(i4) \cdot [- A_{1z}(i1) + A_{fz}(i4) - A_{bz}(i8)] \}
 \end{aligned}$$

$$w^{**}(i6) = w^n(i6)$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{4} \frac{\delta t}{MV(i6)} \cdot \{ - p(i4) \cdot [- A_{1z}(i1) - A_{fz}(i3) - A_{bz}(i8)] \\
 & + \sigma_{zx}(i4) \cdot [- A_{1x}(i1) - A_{fx}(i3) - A_{bx}(i8)] \\
 & + \sigma_{zy}(i4) \cdot [- A_{1y}(i1) - A_{fy}(i3) - A_{by}(i8)] \\
 & + \sigma_{zz}(i4) \cdot [- A_{1z}(i1) - A_{fz}(i3) - A_{bz}(i8)] \}
 \end{aligned}$$

$$w^{**}(i7) = w^n(i7)$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{4} \frac{\delta t}{MV(i7)} \cdot \{ - p(i4) \cdot [+ A_{1z}(i4) - A_{fz}(i3) - A_{bz}(i8)] \\
 & + \sigma_{zx}(i4) \cdot [+ A_{1x}(i4) - A_{fx}(i3) - A_{bx}(i8)] \\
 & + \sigma_{zy}(i4) \cdot [+ A_{1y}(i4) - A_{fy}(i3) - A_{by}(i8)] \\
 & + \sigma_{zz}(i4) \cdot [+ A_{1z}(i4) - A_{fz}(i3) - A_{bz}(i8)] \}
 \end{aligned}$$

$$w^{**}(i8) = w^n(i8)$$

$$\begin{aligned}
 - \frac{1}{4} \frac{\delta t}{MV(i8)} \cdot \{ & - p(i4) \cdot [+ A_{1z}(i4) + A_{fz}(i4) - A_{bz}(i8)] \\
 & + \sigma_{zx}(i4) \cdot [+ A_{1x}(i4) + A_{fx}(i4) - A_{bx}(i8)] \\
 & + \sigma_{zy}(i4) \cdot [+ A_{1y}(i4) + A_{fy}(i4) - A_{by}(i8)] \\
 & + \sigma_{zz}(i4) \cdot [- A_{1z}(i4) + A_{fz}(i4) - A_{bz}(i8)] \}
 \end{aligned}$$

Die Komponenten des Spannungstensors

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

sind durch

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= 2 \mu \frac{\partial u}{\partial x} & \sigma_{yy} &= 2 \mu \frac{\partial v}{\partial y} \\
 \sigma_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \sigma_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
 \sigma_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \sigma_{zz} &= 2 \mu \frac{\partial w}{\partial z}
 \end{aligned}$$

gegeben, wobei die auftretenden partiellen Ableitungen durch

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial x}(i4) &= \frac{1}{4 \cdot V(i4)} \cdot [+ u_{3478} \cdot A_{1x}(i4) - u_{1256} \cdot A_{1x}(i1) \\
 &+ u_{1458} \cdot A_{fx}(i4) - u_{2367} \cdot A_{fx}(i3) \\
 &+ u_{1234} \cdot A_{bx}(i4) - u_{5678} \cdot A_{bx}(i8)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y}|_{i4} = \frac{1}{4 \cdot V(i4)} \cdot [& + u_{3478} \cdot A_{1y}(i4) - u_{1256} \cdot A_{1y}(i1) \\ & + u_{1458} \cdot A_{fy}(i4) - u_{2367} \cdot A_{fy}(i3) \\ & + u_{1234} \cdot A_{by}(i4) - u_{5678} \cdot A_{by}(i8)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z}|_{i4} = \frac{1}{4 \cdot V(i4)} \cdot [& + u_{3478} \cdot A_{1z}(i4) - u_{1256} \cdot A_{1z}(i1) \\ & + u_{1458} \cdot A_{fz}(i4) - u_{2367} \cdot A_{fz}(i3) \\ & + u_{1234} \cdot A_{bz}(i4) - u_{5678} \cdot A_{bz}(i8)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x}|_{i4} = \frac{1}{4 \cdot V(i4)} \cdot [& + v_{3478} \cdot A_{1x}(i4) - v_{1256} \cdot A_{1x}(i1) \\ & + v_{1458} \cdot A_{fx}(i4) - v_{2367} \cdot A_{fx}(i3) \\ & + v_{1234} \cdot A_{bx}(i4) - v_{5678} \cdot A_{bx}(i8)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y}|_{i4} = \frac{1}{4 \cdot V(i4)} \cdot [& + v_{3478} \cdot A_{1y}(i4) - v_{1256} \cdot A_{1y}(i1) \\ & + v_{1458} \cdot A_{fy}(i4) - v_{2367} \cdot A_{fy}(i3) \\ & + v_{1234} \cdot A_{by}(i4) - v_{5678} \cdot A_{by}(i8)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial z}|_{i4} = \frac{1}{4 \cdot V(i4)} \cdot [& + v_{3478} \cdot A_{1z}(i4) - v_{1256} \cdot A_{1z}(i1) \\ & + v_{1458} \cdot A_{fz}(i4) - v_{2367} \cdot A_{fz}(i3) \\ & + v_{1234} \cdot A_{bz}(i4) - v_{5678} \cdot A_{bz}(i8)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x}|_{i4} = \frac{1}{4 \cdot V(i4)} \cdot [& + w_{3478} \cdot A_{1x}(i4) - w_{1256} \cdot A_{1x}(i1) \\ & + w_{1458} \cdot A_{fx}(i4) - w_{2367} \cdot A_{fx}(i3) \\ & + w_{1234} \cdot A_{bx}(i4) - w_{5678} \cdot A_{bx}(i8)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y}|_{i4} = \frac{1}{4 \cdot V(i4)} \cdot [& + w_{3478} \cdot A_{1y}(i4) - w_{1256} \cdot A_{1y}(i1) \\ & + w_{1458} \cdot A_{fy}(i4) - w_{2367} \cdot A_{fy}(i3) \\ & + w_{1234} \cdot A_{by}(i4) - w_{5678} \cdot A_{by}(i8)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z}|_{i4} = \frac{1}{4 \cdot V(i4)} \cdot [& + w_{3478} \cdot A_{1z}(i4) - w_{1256} \cdot A_{1z}(i1) \\ & + w_{1458} \cdot A_{fz}(i4) - w_{2367} \cdot A_{fz}(i3) \\ & + w_{1234} \cdot A_{bz}(i4) - w_{5678} \cdot A_{bz}(i8)] \end{aligned}$$

approximiert werden.

Die Differenzengleichungen der Phase 2

Wie in Abschnitt 3.2.3.2 beschrieben, wird für jede reguläre Zelle des Lösungsgebietes eine Druckänderung

$$\delta p(i4) = - \frac{D \cdot V(i4)}{\delta t \cdot \beta}$$

berechnet. Die Summe der einzelnen Druckänderungen

$$\delta p_g(i4) := \sum_{n=1}^{n^*} \delta p(i4)$$

beeinflusst gemäß dem Impulserhaltungssatz die in den Knoten abgespeicherten Geschwindigkeitskomponenten

in x-Richtung

$$u^{***}(i1) = u^{**}(i1)$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{\delta t \cdot \delta p_g(i4)}{MV(i1)} \cdot [- A_{1x}(i1) + A_{fx}(i4) + A_{bx}(i4)]$$

$$u^{***}(i2) = u^{**}(i2)$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{\delta t \cdot \delta p_g(i4)}{MV(i2)} \cdot [- A_{1x}(i1) - A_{fx}(i3) + A_{bx}(i4)]$$

$$u^{***}(i3) = u^{**}(i3)$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{\delta t \cdot \delta p_g(i4)}{MV(i3)} \cdot [+ A_{1x}(i4) - A_{fx}(i3) + A_{bx}(i4)]$$

$$u^{***}(i4) = u^{**}(i4)$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{\delta t \cdot \delta p_g(i4)}{MV(i4)} \cdot [+ A_{lx}(i4) + A_{fx}(i4) + A_{bx}(i4)]$$

$$u^{***}(i5) = u^{**}(i5)$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{\delta t \cdot \delta p_g(i4)}{MV(i5)} \cdot [- A_{lx}(i1) + A_{fx}(i4) - A_{bx}(i8)]$$

$$u^{***}(i6) = u^{**}(i6)$$

$$- \frac{1}{4} \frac{\delta t \cdot \delta p_g(i4)}{MV(i6)} \cdot [- A_{lx}(i1) - A_{fx}(i3) - A_{bx}(i8)]$$

$$u^{***}(i7) = u^{**}(i7)$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{\delta t \cdot \delta p_g(i4)}{MV(i7)} \cdot [+ A_{lx}(i4) - A_{fx}(i3) - A_{bx}(i8)]$$

$$u^{***}(i8) = u^{**}(i8)$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{\delta t \cdot \delta p_g(i4)}{MV(i8)} \cdot [+ A_{lx}(i4) + A_{fx}(i4) - A_{bx}(i8)]$$

in y-Richtung

$$v^{***}(i1) = v^{**}(i1)$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{\delta t \cdot \delta p_g(i4)}{MV(i1)} \cdot [- A_{ly}(i1) + A_{fy}(i4) + A_{by}(i4)]$$

$$v^{***}(i2) = v^{**}(i2)$$

$$- \frac{1}{4} \frac{\delta t \cdot \delta p_g(i4)}{MV(i2)} \cdot [- A_{ly}(i1) - A_{fy}(i3) + A_{by}(i4)]$$

$$v^{***}(i3) = v^{**}(i3)$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{\delta t \cdot \delta p_g(i4)}{MV(i3)} \cdot [- A_{ly}(i4) - A_{fy}(i3) + A_{by}(i4)]$$

$$v^{***}(i4) = v^{**}(i4)$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{\delta t \cdot \delta p_g(i4)}{MV(i4)} \cdot [+ A_{ly}(i4) + A_{fy}(i4) + A_{by}(i4)]$$

$$v^{***}(i5) = v^{**}(i5)$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{\delta t \cdot \delta p_g(i4)}{MV(i5)} \cdot [- A_{ly}(i1) + A_{fy}(i4) - A_{by}(i8)]$$

$$v^{***}(i6) = v^{**}(i6)$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{\delta t \cdot \delta p_g(i4)}{MV(i6)} \cdot [- A_{ly}(i1) - A_{fy}(i3) - A_{by}(i8)]$$

$$v^{***}(i7) = v^{**}(i7)$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{\delta t \cdot \delta p_g(i4)}{MV(i7)} \cdot [+ A_{ly}(i4) - A_{fy}(i3) - A_{by}(i8)]$$

$$v^{***}(i8) = v^{**}(i8)$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{\delta t \cdot \delta p_g(i4)}{MV(i8)} \cdot [+ A_{ly}(i4) + A_{fy}(i4) - A_{by}(i8)]$$

in z-Richtung

$$w^{***}(i1) = w^{**}(i1)$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{\delta t \cdot \delta p_g(i1)}{MV(i1)} \cdot [- A_{iz}(i1) + A_{fz}(i4) - A_{bz}(i4)]$$

$$w^{***}(i2) = w^{**}(i2)$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{\delta t \cdot \delta p_g(i2)}{MV(i2)} \cdot [- A_{1z}(i1) - A_{fz}(i3) + A_{bz}(i4)]$$

$$w^{***}(i3) = w^{**}(i3)$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{\delta t \cdot \delta p_g(i4)}{MV(i3)} \cdot [+ A_{1z}(i4) - A_{fz}(i3) + A_{bz}(i4)]$$

$$w^{***}(i4) = w^{**}(i4)$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{\delta t \cdot \delta p_g(i4)}{MV(i4)} \cdot [+ A_{1z}(i4) + A_{fz}(i4) + A_{bz}(i4)]$$

$$w^{***}(i5) = w^{**}(i5)$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{\delta t \cdot \delta p_g(i4)}{MV(i5)} \cdot [- A_{1z}(i1) + A_{fz}(i4) - A_{bz}(i8)]$$

$$w^{***}(i6) = w^{**}(i6)$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{\delta t \cdot \delta p_g(i4)}{MV(i6)} \cdot [- A_{1z}(i1) - A_{fz}(i3) - A_{bz}(i8)]$$

$$w^{***}(i7) = w^{**}(i7)$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{\delta t \cdot \delta p_g(i4)}{MV(i7)} \cdot [+ A_{1z}(i4) - A_{fz}(i3) - A_{bz}(i8)]$$

$$w^{***}(i8) = w^{**}(i8)$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{\delta t \cdot \delta p_g(i4)}{MV(i8)} \cdot [+ A_{1z}(i4) + A_{fz}(i4) - A_{bz}(i8)]$$

Die Differenzengleichungen der Phase 3

Die Impulsdichteänderung $\delta(\rho \vec{u})$ innerhalb einer regulären Masche (ijk) aufgrund konvektiver Austauschvorgänge von Impuls ergibt sich mit den in Abschnitt 3.2.3.3 definierten Flußkoeffizienten

für die x-Richtung

$$\begin{aligned} \vec{i} \cdot \int_A (\rho \vec{u}) \cdot (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA \cdot \delta t &= -V |_{ijk} \cdot \delta(\rho u) |_{ijk} \\ &= \frac{1}{2} \{ \delta V_l (1 - a_l) (\rho u) |_{imjk} + \delta V_r (1 - a_r) (\rho u) |_{ipjk} \\ &\quad + \delta V_f (1 - a_f) (\rho u) |_{ijmk} + \delta V_d (1 - a_d) (\rho u) |_{ijpk} \\ &\quad + \delta V_b (1 - a_b) (\rho u) |_{ijkm} + \delta V_t (1 - a_t) (\rho u) |_{ijkp} \\ &\quad + [\delta V_l (1 + a_l) + \delta V_r (1 + a_r) + \delta V_f (1 + a_f) \\ &\quad + \delta V_d (1 + a_d) + \delta V_b (1 + a_b) + \delta V_t (1 + a_t)] (\rho u) |_{ijk} \end{aligned}$$

für die y-Richtung

$$\begin{aligned} \vec{j} \cdot \int_A (\rho \vec{u}) \cdot (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA \cdot \delta t &= -V |_{ijk} \cdot \delta(\rho v) |_{ijk} \\ &= \frac{1}{2} \{ \delta V_l (1 - a_l) (\rho v) |_{imjk} + \delta V_r (1 - a_r) (\rho v) |_{ipjk} \\ &\quad + \delta V_f (1 - a_f) (\rho v) |_{ijmk} + \delta V_d (1 - a_d) (\rho v) |_{ijpk} \\ &\quad + \delta V_b (1 - a_b) (\rho v) |_{ijkm} + \delta V_t (1 - a_t) (\rho v) |_{ijkp} \\ &\quad + [\delta V_l (1 + a_l) + \delta V_r (1 + a_r) + \delta V_f (1 + a_f) \\ &\quad + \delta V_d (1 + a_d) + \delta V_b (1 + a_b) + \delta V_t (1 + a_t)] (\rho v) |_{ijk} \end{aligned}$$

für die z-Richtung

$$\begin{aligned}
 \vec{k} \cdot \int_A (\rho \vec{u}) \cdot (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA \cdot \delta t &= -V|_{ijk} \cdot \delta(\rho w)|_{ijk} \\
 &= \frac{1}{2} \{ \delta V_l (1 - a_l) (\rho w)|_{imjk} + \delta V_r (1 - a_r) (\rho w)|_{ipjk} \\
 &\quad + \delta V_f (1 - a_f) (\rho w)|_{ijmk} + \delta V_d (1 - a_d) (\rho w)|_{ijpk} \\
 &\quad + \delta V_b (1 - a_b) (\rho w)|_{ijkm} + \delta V_t (1 - a_t) (\rho w)|_{ijkp} \\
 &\quad + [\delta V_l (1 + a_l) + \delta V_r (1 + a_r) + \delta V_f (1 + a_f) \\
 &\quad - \delta V_d (1 + a_d) + \delta V_b (1 + a_b) + \delta V_t (1 + a_t)] (\rho w)|_{ijk}
 \end{aligned}$$

Nach Auswertung dieser Gleichungen für jede reguläre Zelle des Lösungsgebietes werden abschließend die Impulsdichteänderungen auf die in den Knoten des Maschennetzes angeordneten Geschwindigkeitskomponenten verteilt. Für die einzelnen Geschwindigkeitskomponenten gilt:

in x-Richtung

$$u^{n+1}_{i1} = u^{***}(i1) + \frac{1}{8 \text{ MV}(i1)} \cdot \delta(\rho u)_{ijk}$$

$$u^{n+1}_{i2} = u^{***}(i2) + \frac{1}{8 \text{ MV}(i2)} \cdot \delta(\rho u)_{ijk}$$

$$u^{n+1}_{i3} = u^{***}(i3) + \frac{1}{8 \text{ MV}(i3)} \cdot \delta(\rho u)_{ijk}$$

$$u^{n+1}_{i4} = u^{***}(i4) + \frac{1}{8 \text{ MV}(i4)} \cdot \delta(\rho u)_{ijk}$$

$$u^{n+1}_{i5} = u^{***}(i5) + \frac{1}{8 \text{ MV}(i5)} \cdot \delta(\rho u)_{ijk}$$

$$u^{n+1}_{i6} = u^{***}(i6) + \frac{1}{8 \text{ MV}(i6)} \cdot \delta(\rho u)_{ijk}$$

$$u^{n+1}_{i7} = u^{***}(i7) + \frac{1}{8 \text{ MV}(i7)} \cdot \delta(\rho u)_{ijk}$$

$$u^{n+1}_{i8} = u^{***}(i8) + \frac{1}{8 \text{ MV}(i8)} \cdot \delta(\rho u)_{ijk}$$

in y-Richtung

$$v^{n+1}(i1) = v^{***}(i1) + \frac{1}{8 \text{ MV}(i1)} \cdot \delta(\rho v) |_{ijk}$$

$$v^{n+1}(i2) = v^{***}(i2) + \frac{1}{8 \text{ MV}(i2)} \cdot \delta(\rho v) |_{ijk}$$

$$v^{n+1}(i3) = v^{***}(i3) + \frac{1}{8 \text{ MV}(i3)} \cdot \delta(\rho v) |_{ijk}$$

$$v^{n+1}(i4) = v^{***}(i4) + \frac{1}{8 \text{ MV}(i4)} \cdot \delta(\rho v) |_{ijk}$$

$$v^{n+1}(i5) = v^{***}(i5) + \frac{1}{8 \text{ MV}(i5)} \cdot \delta(\rho v) |_{ijk}$$

$$v^{n+1}(i6) = v^{***}(i6) + \frac{1}{8 \text{ MV}(i6)} \cdot \delta(\rho v) |_{ijk}$$

$$v^{n+1}(i7) = v^{***}(i7) + \frac{1}{8 \text{ MV}(i7)} \cdot \delta(\rho v) |_{ijk}$$

$$v^{n+1}(i8) = v^{***}(i8) + \frac{1}{8 \text{ MV}(i8)} \cdot \delta(\rho v) |_{ijk}$$

in z-Richtung

$$w^{n+1}(i1) = w^{***}(i1) + \frac{1}{8 \text{ MV}(i1)} \cdot \varepsilon(\rho w) |_{ijk}$$

$$w^{n+1}(i2) = w^{***}(i2) + \frac{1}{8 \text{ MV}(i2)} \cdot \delta(\rho w) |_{ijk}$$

$$w^{n+1}(i3) = w^{***}(i3) + \frac{1}{8 \text{ MV}(i3)} \cdot \varepsilon(\rho w) |_{ijk}$$

$$w^{n+1}(i4) = w^{***}(i4) + \frac{1}{8 \text{ MV}(i4)} \cdot \delta(\rho w) |_{ijk}$$

$$w^{n+1}(i5) = w^{***}(i5) + \frac{1}{8 \text{ MV}(i5)} \cdot \delta(\rho w) |_{ijk}$$

$$w^{n+1}(i6) = w^{***}(i6) + \frac{1}{8 \text{ MV}(i6)} \cdot \varepsilon(\rho w) |_{ijk}$$

$$w^{n+1}(i7) = w^{***}(i7) + \frac{1}{8 \text{ MV}(i7)} \cdot \delta(\rho w) |_{ijk}$$

$$w^{n+1}(i8) = w^{***}(i8) + \frac{1}{8 \text{ MV}(i8)} \cdot \delta(\rho w) |_{ijk}$$

Anhang A2: Stabilitätsanalyse des Diskretisierungsverfahrens am Beispiel der eindimensionalen Burgers-Gleichung

Um das grundlegende Vorgehen bei der Diskretisierung einer Differentialgleichung unter Verwendung des Finite-Volumen-Verfahrens zu zeigen und um auf Stabilitätsprobleme bei der numerischen Lösung einzugehen, wird im folgenden die aus der Literatur [z. B. 43] bekannte Burgers-Gleichung behandelt:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial (k \omega)}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \quad (A2.1)$$

Es handelt sich hierbei um eine lineare Differentialgleichung für die Funktion $\omega = \omega(x)$, die ähnlich wie die Navier-Stokes-Gleichung konvektive und diffusive Terme aufweist, sofern μ die Viskosität darstellt. Sie soll in dem in Bild A2.1 dargestellten Gebiet integriert werden.



Bild A2.1: Eindimensionales Integrationsgebiet zur Lösung der Burgers-Gleichung

Zur Ableitung der Differenzengleichung wird um einen Punkt i ein "Kontrollvolumen" gelegt, über das die Burgers-Gleichung integriert wird (Bild A2.2).

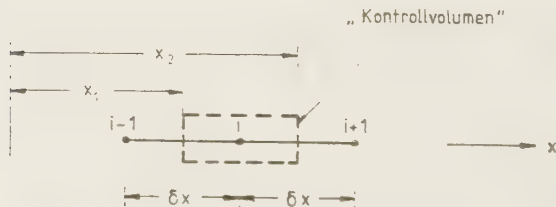


Bild A2.2: Kontrollvolumen zur Ableitung der Differenzengleichung

Es ergibt sich dann:

$$\int_V \frac{\partial \omega}{\partial t} dV + \int_V \frac{\partial (k\omega)}{\partial x} dV = \int_V \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} dV \quad (A2.2)$$

Nimmt man an, daß die Größe μ im Integrationsgebiet konstant ist, so folgt aus der Beziehung (A2.2):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \omega dx + (k\omega)|_{x_2} - (k\omega)|_{x_1} = \\ \mu \left\{ \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \Big|_{x_2} - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \Big|_{x_1} \right\} \end{aligned}$$

Unter der Annahme eines linearen Funktionsverlaufes $\omega(x)$ im Integrationsgebiet gilt für die Approximation der ersten Ableitung:

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \Big|_{x_1} = \frac{1}{\delta x} (\omega_i - \omega_{i-1})$$

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \Big|_{x_2} = \frac{1}{\delta x} (\omega_{i+1} - \omega_i)$$

Für die Terme $(k\omega)|_{x_2}$ und $(k\omega)|_{x_1}$ kann im einfachsten Fall das arithmetische Mittel aus Funktionswerten an benachbarten Stützstellen gewählt werden. Für $k = \text{konst}$ gilt:

$$(k\omega) \Big|_{x_2} = \frac{k}{2} (\omega_{i+1} + \omega_i)$$

$$(k\omega) \Big|_{x_1} = \frac{k}{2} (\omega_i + \omega_{i-1})$$

Approximiert man die zeitliche Ableitung durch

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \omega dx = \frac{\delta x}{\delta t} (\omega_i^{n+1} - \omega_i^n)$$

so ergibt sich folgende Differenzengleichung:

$$\frac{\omega_i^{n+1} - \omega_i^n}{\delta t} = - \frac{k}{2\delta x} (\omega_{i+1}^n - \omega_{i-1}^n) + \frac{\mu}{\delta x^2} (\omega_{i+1}^n - 2\omega_i^n + \omega_{i-1}^n) \quad (A2.3)$$

Durch diese Form der Differenzengleichung wird die Lösung nicht durch zusätzliche, d. h. numerisch bedingte Viskosität beeinflusst. Um dies zu zeigen, wird nach Hirt [44] die Funktion $\omega^n(x)$ an der Stelle i in eine Taylor-Reihe bis zur zweiten Ordnung entwickelt; dann gilt für den Funktionswert ω_{i+1}^n an der Stelle $i+1$:

$$\omega_{i+1}^n = \omega_i^n + \delta x \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + O(\delta x^3)$$

bzw. für den Funktionswert ω_{i-1}^n an der Stelle $i-1$:

$$\omega_{i-1}^n = \omega_i^n - \delta x \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + O(\delta x^3)$$

Durch Einsetzen folgt:

$$\frac{\omega_i^{n+1} - \omega_i^n}{\delta t} = - k \frac{\partial \omega}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$$

Die so erhaltene Gleichung stimmt mit der ursprünglichen Differentialgleichung überein. Insbesondere tauchen keine zusätzlichen Differentialquotienten zweiter Ordnung in der Gleichung auf, die sich wie eine scheinbar erhöhte Viskosität auf die Lösung auswirken würden.

Wie später noch gezeigt wird, weist die vorgenommene Diskretisierung jedoch ein ungünstiges Stabilitätsverhalten auf. Man erhält eine Differenzengleichung mit günstigeren Stabilitätseigenschaften, wenn die aus

der ersten Ableitung resultierenden Ausdrücke $(k\omega)|_{x_2}$ und $(k\omega)|_{x_1}$ nicht arithmetisch aus den benachbarten Stützstellen, sondern durch

$$(k\omega)|_{x_1} = \frac{k}{2} [\omega_{i-1} (1 + \alpha_0 + \beta_0 C) + \omega_i (1 - \alpha_0 - \beta_0 C)]$$

$$(k\omega)|_{x_2} = \frac{k}{2} [\omega_i (1 + \alpha_0 + \beta_0 C) + \omega_{i+1} (1 - \alpha_0 - \beta_0 C)]$$

wobei

$$C = \frac{k}{2} \frac{\delta t}{\delta x}$$

ist, approximiert werden. Die frei wählbaren Konstanten α_0 und β_0 sollen die Relationen

$$0 \leq \alpha_0 + \beta_0 \leq 1$$

$$\alpha_0 \geq 0$$

$$\beta_0 \geq 0$$

erfüllen; als Grenzfälle ergeben sich:

$$\alpha_0 = 0 ; \beta_0 = 0 \quad \text{zentrale Differenzenapproximation}$$

$$\alpha_0 = 1 ; \beta_0 = 0 \quad \text{Upwind-Differenzenapproximation}$$

$$\alpha_0 = 0 ; \beta_0 = 1 \quad \text{Interpolated-Donor-Cell Approximation}$$

Im Fall der sogenannten Upwind-Differenzenapproximation, d. h. für $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$, lautet die Differenzengleichung:

$$\frac{\omega_i^{n+1} - \omega_i^n}{\delta t} = - \frac{k}{\delta x} (\omega_i^n - \omega_{i-1}^n) + \frac{\mu}{\delta x^2} (\omega_{i+1}^n - 2 \omega_i^n + \omega_{i-1}^n)$$

Das erneute Einsetzen von Taylor-Reihen-Entwicklungen für die jeweiligen Funktionswerte in die Differenzengleichung läßt erkennen

$$\frac{\omega_i^{n+1} - \omega_i^n}{\delta t} = -k \frac{\partial \omega}{\partial x} + \left(\mu + \frac{k \delta x}{2} \right) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$$

daß sich der Koeffizient zur zweiten Ableitung $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$ vergrößert, und zwar um den Term $k \frac{\delta x}{2}$, der deshalb auch als numerische Viskosität bezeichnet wird.

Schließlich ergibt sich bei der sogenannten Interpolated-Donor-Cell Approximation, bei der die Parameter die Werte $\alpha_0 = 0$ und $\beta_0 = 1$ annehmen, folgender Anteil der numerischen Viskosität:

$$\frac{1}{2} k \delta x C$$

Stabilität

Nach Roache [43] erwartet man von einem stabilen System, daß es z. B. nach Erreichen eines stationären Zustands eine möglicherweise durch Rundungsfehler auftretende Störung im Verlauf der Rechnung glättet. Um diese Eigenschaft zu untersuchen, wird einer angenommenen stationären Lösung $\omega = \omega(x)$ eine willkürlich gewählte Störung $\epsilon = \epsilon(x)$ überlagert, wie dies in Bild A2.3 dargestellt ist.

Wird die Lösung ω in ihren stationären Anteil $\bar{\omega}$ und in die Störgröße ϵ aufgeteilt:

$$\omega_i^n = \bar{\omega}_i^n + \epsilon_i$$

so erhält man aus der mit zentralen Differenzen entstandenen Gleichung (A2. 3):

$$\frac{1}{\delta t} (\omega_i^{n+1} - \omega_i^n) = -\frac{k}{2\delta x} (\bar{\omega}_{i+1}^n - \bar{\omega}_{i-1}^n) + \frac{\mu}{\delta x^2} (\bar{\omega}_{i+1}^n - 2\bar{\omega}_i^n + \bar{\omega}_{i-1}^n) - \frac{k}{2\delta x} (\epsilon_{i+1}^n - \epsilon_{i-1}^n) + \frac{\mu}{\delta x^2} (\epsilon_{i+1}^n - 2\epsilon_i^n + \epsilon_{i-1}^n)$$

Die ersten beiden Terme der rechten Seite sind wegen der vorausgesetzten stationären Lösung identisch Null, womit sich für die Änderung $\delta\omega_i = \omega_i^{n+1} - \omega_i^n$ die Gleichung

$$\delta\omega_i = -\frac{k}{2\delta x} (\epsilon_{i+1} - \epsilon_{i-1}) + \frac{\mu}{\delta x^2} (\epsilon_{i+1} - 2\epsilon_i + \epsilon_{i-1})$$

ergibt. Der erste Term der rechten Seite beschreibt den Einfluß der Störung aufgrund konvektiver Transportvorgänge, während der zweite Term die Auswirkungen auf die Lösung aufgrund diffusiver Austauschprozesse kennzeichnet. Zur besseren Übersichtlichkeit werden die Einflüsse getrennt untersucht.

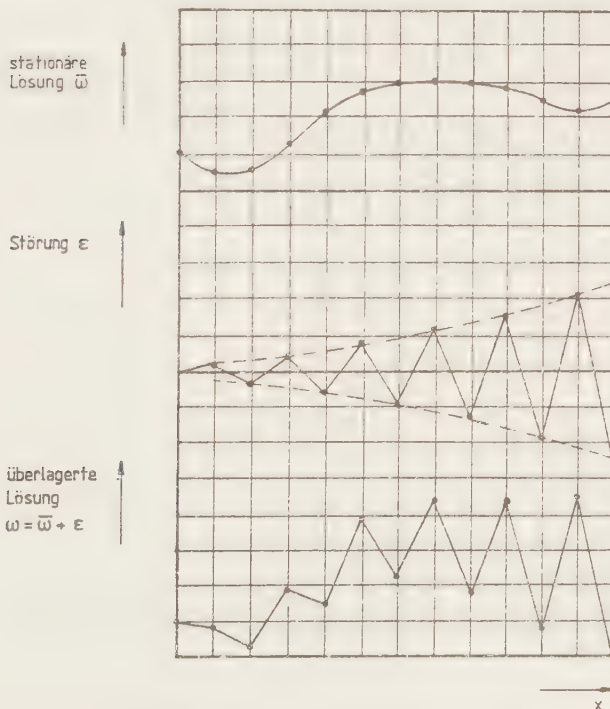


Bild A2.3: Zur Untersuchung des Stabilitätsverhaltens

Analyse des diffusiven Störterms

Unter Annahme der in Bild A2.3 dargestellten Störung ergibt sich für den diffusiven Anteil unabhängig von der Größe des Zeitschrittes ein Wert, der kleiner als Null ist. Dies führt im Laufe der Rechnung zu einer Glättung der positiven Störgröße ϵ_i an der Stelle i. Bei Wahl eines Zeitschrittes δt in der Art, daß

$$\left| \frac{u \cdot \delta t}{\delta x^2} \{ \epsilon_{i+1} - 2 \epsilon_i + \epsilon_{i-1} \} \right| > \left| \epsilon_i \right|$$

wird, kommt es in dem System zu einem Überschwingen, das die Lösung beeinträchtigt. Dementsprechend gibt obige Ungleichung eine obere Schranke für den Zeitschritt δt an.

Analyse des konvektiven Störterms

Das Stabilitätsverhalten der ersten Ableitung ist gänzlich von dem oben beschriebenen Verhalten der diffusiven Terme verschieden. Nimmt man nach Bild A2.3 an, daß

$$0 > \epsilon_{i-1} > \epsilon_{i+1}$$

ist, so ergibt sich für die Änderung $\delta \omega_i$ infolge der konvektiven Terme:

$$\delta \omega_i = -\frac{k \delta t}{2 \delta x} (\epsilon_{i+1} - \epsilon_{i-1}) > 0$$

Legt man die in Bild A2.3 dargestellten Verhältnisse zugrunde, so wird der an der Stelle i vorhandenen positiven Störgröße ϵ_i eine positive Änderung hinzugefügt, so daß die Störung ϵ_i im Verlauf der Rechnung monoton anwächst. Diese Instabilitätserscheinung kann auch nicht durch eine geeignete Wahl des Zeitschrittes verhindert werden.

Anders hingegen bei der Approximation der konvektiven Terme mit Hilfe der sogenannten "Interpolated-Donor-Cell-Methode" ergibt sich für die instationäre Burgers-Gleichung die Differenzengleichung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t} (w_i^{n+1} - w_i^n) = & -\frac{k}{2\delta x} [w_{i+1}^n - w_{i-1}^n - C (w_{i+1}^n - 2w_i^n + w_{i-1}^n)] \\ & + \frac{\mu}{\delta x^2} (w_{i+1}^n - 2w_i^n + w_{i-1}^n) \end{aligned} \quad (A2.4)$$

Unter der obigen Annahme, daß die Lösung w_i^n in einen stationären Anteil und in einen Störterm aufgespalten werden kann, folgt für die Änderung $\delta w_i = w_i^{n+1} - w_i^n$ die Gleichung:

$$\begin{aligned} \delta w_i = & -\frac{k\delta t}{2\delta x} [\epsilon_{i+1} - \epsilon_{i-1} - C (\epsilon_{i+1} - 2\epsilon_i + \epsilon_{i-1})] \\ & + \frac{\mu \delta t}{\delta x^2} (\epsilon_{i+1} - 2\epsilon_i + \epsilon_{i-1}) \end{aligned}$$

die wiederum den Einfluß der Störung infolge konvektiver und diffusiver Transportvorgänge beschreibt.

Der diffusive Störterm

$$\frac{\mu \delta t}{\delta x^2} (\epsilon_{i+1} - 2\epsilon_i + \epsilon_{i-1})$$

ist oben schon diskutiert worden, so daß noch die Analyse des konvektiven Störterms

$$-\frac{k}{2} \frac{\delta t}{\delta x} [\epsilon_{i+1} - \epsilon_{i-1} - C (\epsilon_{i+1} - 2\epsilon_i + \epsilon_{i-1})]$$

erfolgen muß.

Unter Annahme des in Bild A2.3 dargestellten Störungsverlaufes muß der Parameter C für eine stabile Lösung so gewählt werden, daß die

Ungleichung

$$\epsilon_{i+1} - \epsilon_{i-1} - C (\epsilon_{i+1} - 2 \epsilon_i + \epsilon_{i-1}) > 0$$

erfüllt wird. Damit wird die positive Störung ϵ_i an der Stelle i durch einen negativen Wert korrigiert, und das Verfahren arbeitet stabil.

Um zu einer ersten Aussage über die notwendige Größe des Parameters C zu gelangen, wird untersucht, wie sich eine an einem bestimmten Punkt aufgeprägte Störung ϵ im zeitlichen Verlauf verhält. Nach Roache [43] ist Stabilität dann gegeben, wenn diese Störung ϵ im Verlauf der Rechnung völlig gedämpft wird.

Wird angenommen, daß

$$\omega_i^n = \begin{cases} 0 & \text{für alle } i \neq j \\ \epsilon & \text{für alle } i = j \end{cases}$$

gilt, so ergibt sich unter alleiniger Beachtung des konvektiven Terms aus Gleichung (A2. 4)

$$\omega_j^{n+1} = \epsilon (1 - k C \frac{\delta t}{\delta x})$$

Mit der Definition des Parameters C

$$C = \frac{1}{2} k \frac{\delta t}{\delta x}$$

folgt:

$$\omega_j^{n+1} = \epsilon (1 - 2 C^2)$$

Wenn die Störung ϵ aus dem System verschwinden soll, muß

$$\left| \frac{\omega_j^{n+1}}{\epsilon} \right| < 1$$

bzw.

$$-1 < 1 - 2 C^2 < +1$$

gelten. Die rechte Seite dieser Ungleichung ist stets erfüllt, während die linke Seite die Schranke

$$C < 1$$

ergibt. Ebensovienig darf das System überschwingen, d. h. es muß für diesen ersten Rechenschritt

$$\left| \frac{\omega_j^{n+1}}{\epsilon} \right| > 0$$

sein. Dies ist dann gegeben, wenn

$$C \leq \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

ist.

Analytische Lösung der stationären Burgers-Gleichung

Für die stationäre Burgers-Gleichung

$$k \frac{\partial \omega}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$$

ist es möglich, eine analytische Lösung der Differenzengleichung anzugeben. Aus der Anwendung des oben beschriebenen Diskretisierungsverfahrens und bei Wahl der Parameter α_0 und β_0 zu

$$\alpha_0 = 0 \quad \text{bzw.} \quad \beta_0 = 1$$

folgt die Differenzengleichung

$$w_{i+2} + w_{i+1} \frac{2 \left(kC - \frac{2\mu}{\delta x} \right)}{k - \left(kC + \frac{2\mu}{\delta x} \right)} + w_i \frac{2 \left(kC + \frac{2\mu}{\delta x} \right)}{k - \left(kC + \frac{2\mu}{\delta x} \right)} = 0$$

Werden

$$\mu^* = \frac{1}{2} k C \delta x + \mu$$

und die sogenannte Gitter-Reynolds-Zahl

$$Re_g = \frac{k \delta x}{\mu^*}$$

definiert, so ergibt sich:

$$w_{i+2} + w_{i+1} \frac{4}{Re_g - 2} + w_i \frac{Re_g + 2}{Re_g - 2} = 0 \quad (A2.5)$$

Bei Wahl anderer Parameterwerte für α_0 und β_0 folgen identische Beziehungen, wobei die Gitter-Reynolds-Zahlen aus Tabelle A2.1 entnommen werden können.

$\alpha_0 \backslash \beta_0$	0	1
0	zentrale Differenzen- approximation $\frac{k \cdot \delta x}{\mu}$	interpolated-donor-cell $\frac{k \delta x}{0,5 k C \delta x + \mu}$
1	upwind Differenzen- approximation $\frac{k \cdot \delta x}{0,5 k \delta x + \mu}$	

Tabelle A2.1: Gitter-Reynolds-Zahlen in Abhängigkeit der Parameterwerte α_0 und β_0

Die zur Differenzengleichung (A2. 5) gehörende charakteristische Gleichung lautet:

$$z^2 + \frac{4}{\operatorname{Re}_g - 2} z - \frac{\operatorname{Re}_g + 2}{\operatorname{Re}_g - 2} = 0$$

und besitzt die Lösungen

$$t_1 = 1$$

und

$$t_2 = - \frac{\operatorname{Re}_g + 2}{\operatorname{Re}_g - 2}$$

Hiermit folgt die allgemeine Lösung der Differenzengleichung:

$$\omega_i = K_1 (-1)^j + K_2 (-1)^i \left[\frac{\operatorname{Re}_g + 2}{\operatorname{Re}_g - 2} \right]^i$$

wobei die Konstanten K_1 und K_2 aus den Randbedingungen

$$\omega_0 = \omega(x_1)$$

und

$$\omega_n = \omega(x_{n+1})$$

bestimmt werden:

$$K_1 = \frac{\omega_n - \omega_0}{(-1)^n \left[\frac{\operatorname{Re}_g + 2}{\operatorname{Re}_g - 2} \right]^n - 1}$$

$$K_2 = \omega_0 - \frac{\omega_n - \omega_0}{(-1)^n \left[\frac{\operatorname{Re}_g + 2}{\operatorname{Re}_g - 2} \right]^n - 1}$$

Das Verhalten der Lösungsfunktion $\omega = \omega(i)$ ist von der Größe der Gitter-Reynolds-Zahl abhängig. Ihre Struktur kann durch

$$\omega_i = a + b \left[(-1)^i \left(\frac{\text{Re}_g + 2}{\text{Re}_g - 2} \right)^i - 1 \right]$$

beschrieben werden, wobei a und b Konstanten sind. Für

$$0 \leq \text{Re}_g < 2$$

ist

$$\frac{\text{Re}_g + 2}{\text{Re}_g - 2} < 0$$

womit sowohl für gerades als auch ungerades i die Lösung durch

$$\omega_i = a + b \left[\left| \frac{\text{Re}_g + 2}{\text{Re}_g - 2} \right|^i - 1 \right]$$

ausgedrückt werden kann.

Ist dagegen

$$\text{Re}_g > 2$$

so wird für gerade i -Werte die Lösung durch

$$\omega_i = a + b \left[\left(\frac{\text{Re}_g + 2}{\text{Re}_g - 2} \right)^i - 1 \right]$$

für ungerade i -Werte durch

$$w_1 = a + b \left[- \frac{\left(\frac{Re_g + 2}{Re_g - 2} \right)^i - 1}{2} \right]$$

beschrieben. Dieses "schwingende" Verhalten im Lösungsverlauf in Abhängigkeit von der Gitter-Reynolds-Zahl ist deutlich im folgenden numerischen Beispiel zu erkennen.

Gewählt bzw. vorgegeben werden die in Tabelle A2.2 zusammengestellten Daten.

Viskosität	μ	$\mu =$	10^{-6}	m^2/s
Geschwindigkeit	k	$k =$	$0,6 \cdot 10^{-3}$	m/s
Schrittweite	δx	$\delta x =$	10^{-2}	m
Länge	l	$l =$	$0,1$	m
Randbedingungen				
	$x = 0,0 \text{ m}$	$\omega_1 =$	$5 \cdot 10^{-3}$	m/s
	$x = 0,1 \text{ m}$	$\omega_2 =$	10^{-3}	m/s
Parameter	C	$C =$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	

Tabelle A2.2: Vorgegebene Daten und Werte für das numerische Beispiel

Damit ergeben sich je nach Wahl der Parameterwerte α_0 und β_0 die Gitter-Reynolds-Zahlen zu:

$$\begin{array}{lll} \alpha_0 = 0 & ; & \beta_0 = 0 : & Re_g = 6 \\ \alpha_0 = 0 & ; & \beta_0 = 1 : & Re_g = 1,9223 \\ \alpha_0 = 1 & ; & \beta_0 = 0 : & Re_g = 1,5 \end{array}$$

In Bild A2.4 ist zum Vergleich die exakte Lösung der Differentialgleichung eingetragen. Deutlich erkennt man den bis zu der Stelle $x = 0,09 \text{ m}$ nahezu konstanten Verlauf der Lösung. Erst im Intervall

$$0,09 \text{ m} < x < 0,10 \text{ m}$$

fällt die Lösung steil auf den vorgegebenen Randwert ab.

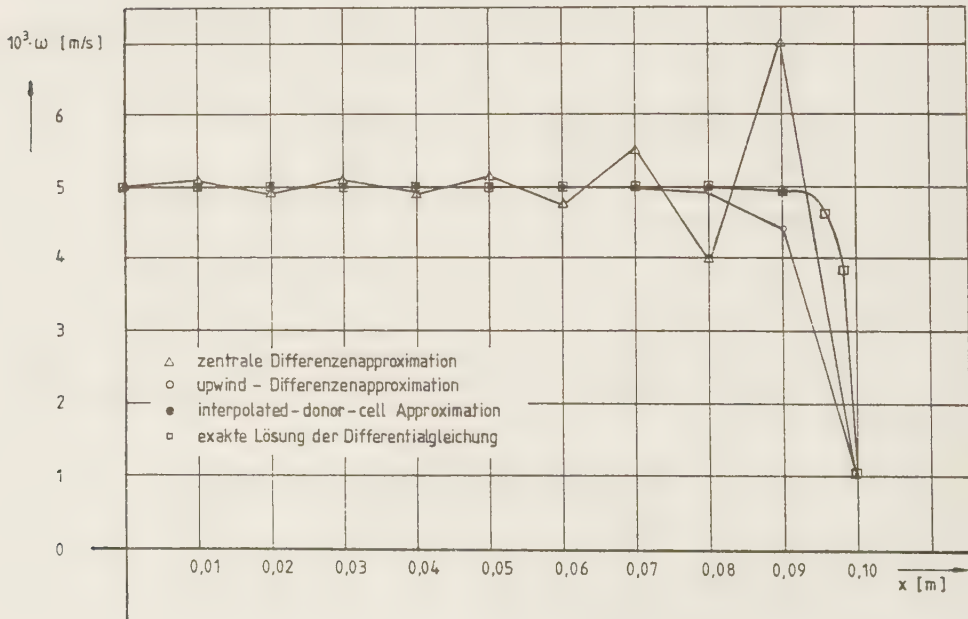


Bild A2.4: Vergleich der exakten Lösung der Differentialgleichung mit exakten Lösungen der Differenzengleichung

Das Überschwingen der Lösung der Differenzengleichung für Gitter-Reynolds-Zahlen größer als zwei ist ebenfalls deutlich sichtbar. Für die Approximation der konvektiven Terme durch die sogenannte "Interpolated-Donor-Cell-Methode" ergeben sich nur sehr geringe Abweichungen von der analytischen Lösung der Differentialgleichung. Bei der "Upwind-Differenzenapproximation" wird eine so große numerische Viskosität in die Rechnung eingebracht, daß die Lösung in Teilbereichen beträchtlich verfälscht und nicht mehr von der physikalischen Viskosität bestimmt wird.

Anhang A3: Anmerkungen zur Zeitschrittwahl im dreidimensionalen Fall

Um numerisch stabile Lösungen der Differentialgleichungen zu erhalten, darf der Zeitschritt δt gewisse obere Grenzen nicht überschreiten. Für ein allgemeines, krummliniges Maschennetz im dreidimensionalen Fall ist es nicht möglich, genaue Kriterien für die Zeitschrittwahl aus den Differenzengleichungen abzuleiten. Häufig beschränkt man sich daher auf die Analyse der Differenzengleichungen, die für ein kartesisches, ebenes Maschennetz aufgestellt worden sind und erweitert die gefundenen Bedingungen für die Zeitschrittwahl auf den allgemeinen, dreidimensionalen Fall.

Da in dem hier beschriebenen Rechenverfahren diffusive Austauschvorgänge in einer rein expliziten Weise berücksichtigt werden, muß der Zeitschritt δt nach Hirt [45] der Bedingung

$$\delta t_d < \frac{1}{4} \left\{ \left[\frac{1}{\delta x^2} + \frac{1}{\delta y^2} + \frac{1}{\delta z^2} \right] \frac{\mu}{\rho} \right\}^{-1}$$

genügen. Ein weiteres grundlegendes Stabilitätskriterium ergibt sich aus der ebenfalls expliziten Berechnung konvektiver Impulsaustauschvorgänge in Phase 3, und zwar darf während eines Zeitschrittes ein Fluidteilchen nicht mehr als eine reguläre Zelle des Lösungsgebietes durchqueren. In einem kartesischen Koordinatensystem muß der Zeitschritt dementsprechend die Bedingung

$$\delta t_k < \min \left\{ \frac{\delta x}{|u|}, \frac{\delta y}{|v|}, \frac{\delta z}{|w|} \right\}$$

erfüllen, da in der während der Phase 3 durchgeführten Berechnung nur konvektive Austauschvorgänge zwischen benachbarten Zellen berücksichtigt werden.

Befriedigendes Stabilitätsverhalten wurde bei den hier durchgeführten Berechnungen dann erzielt, wenn der Zeitschritt δt zu

$$\delta t = 0,20 \dots 0,25 \min (\delta t_d, \delta t_k)$$

gewählt wurde.

Anhang A4: Die Implementierung des Rechenverfahrens

Das beschriebene Rechenverfahren ist in einer zunächst zweidimensionalen Version auf der Rechenanlage Cyber 855 des Rechenzentrums der Ruhr-Universität Bochum in Fortran 77 programmiert worden, um Erfahrungen mit dem Verhalten des Lösungsalgorithmus zu sammeln. Der auf diesem Rechner nur beschränkt zur Verfügung stehende Speicherplatz - im dreidimensionalen Fall können höchstens 600 reguläre Zellen realisiert werden - erforderte einen Übergang auf den Vektorrechner Cyber 205, der im Jahre 1982 als Forschungsrechner des Landes Nordrhein-Westfalen in Bochum installiert wurde. Der vorhandene Autovektorisierer war nicht in der Lage, auch nur eine einzige Schleife des zweidimensionalen Strömungsprogramms zu vektorisieren, so daß eine explizite Vektorisierung des gesamten Programms "von Hand" erforderlich wurde.

Bevor mit der Erstellung der dreidimensionalen Fassung begonnen wurde, ist die vorhandene zweidimensionale Programmversion vektorisiert und ausführlich getestet worden, wobei Vergleiche beider Programmversionen Rechenzeitvorteile um den Faktor 20 zugunsten der Cyber 205 erbrachten.

Sämtliche dreidimensionalen Rechnungen sind mit der in Fortran 200 geschriebenen und auf dem Vektorrechner Cyber 205 implementierten dreidimensionalen Version des Rechenverfahrens durchgeführt worden, wobei das Rechenggebiet in über 30 000 reguläre Maschen aufgelöst werden kann. Bei dieser Größenordnung liegen die Rechenzeiten zwischen 2 und 4 CPU-Stunden.

Die Größe der hier behandelten Probleme erforderte eine klare Trennung der einzelnen Rechenblöcke, und zwar können drei Stufen unterschieden werden:

- Vorschaltprogramme, die die Geometrie für das Strömungsprogramm

aufbereiten und im allgemeinen als interaktiv arbeitende Programme auf der Cyber 855 des Rechenzentrums der Ruhr-Universität Bochum implementiert sind;

- das Strömungsprogramm, das das Geschwindigkeits- und das Druckfeld berechnet ;
- Auswerteprogramme, die die umfangreichen Ergebnisse (bis zu 140 000 Druck- und Geschwindigkeitswerte sind je Zeitschritt zu verarbeiten) graphisch darstellen .

Anmerkungen zur Indexnotation

Das Maschennetz stellt in dem durch die Indizes i,j und k gekennzeichneten logischen Raum einen Quader dar, der in i-Richtung in NX Zellen, in j-Richtung in NY Zellen und in k-Richtung in NZ Zellen unterteilt ist. Als Beispiel ist in Bild A4.1 ein Maschennetz, bestehend aus acht regulären Zellen in i-Richtung und jeweils vier Zellen in j- und k-Richtung, dargestellt. Da in jeder Richtung die Anzahl der Knoten um eins größer als die Zellenzahl ist, umfaßt das Maschennetz insgesamt

$$(8 + 1) (4 + 1) (4 + 1) = 225$$

Knoten, die fortlaufend durchnumeriert werden.

Der Wert des Index i4 des lokalen Numerierungssystems einer regulären Masche ist durch die Beziehung

$$i4 = (k - 1) NXP NYP + (j - 1) NXP + i$$

mit dem Koordinatentripel (i,j,k) verknüpft.

$$NXP NYP = (NX + 1) (NY + 1)$$

ist die Zahl der Knoten in einer Ebene $k = \text{konst.}$ während

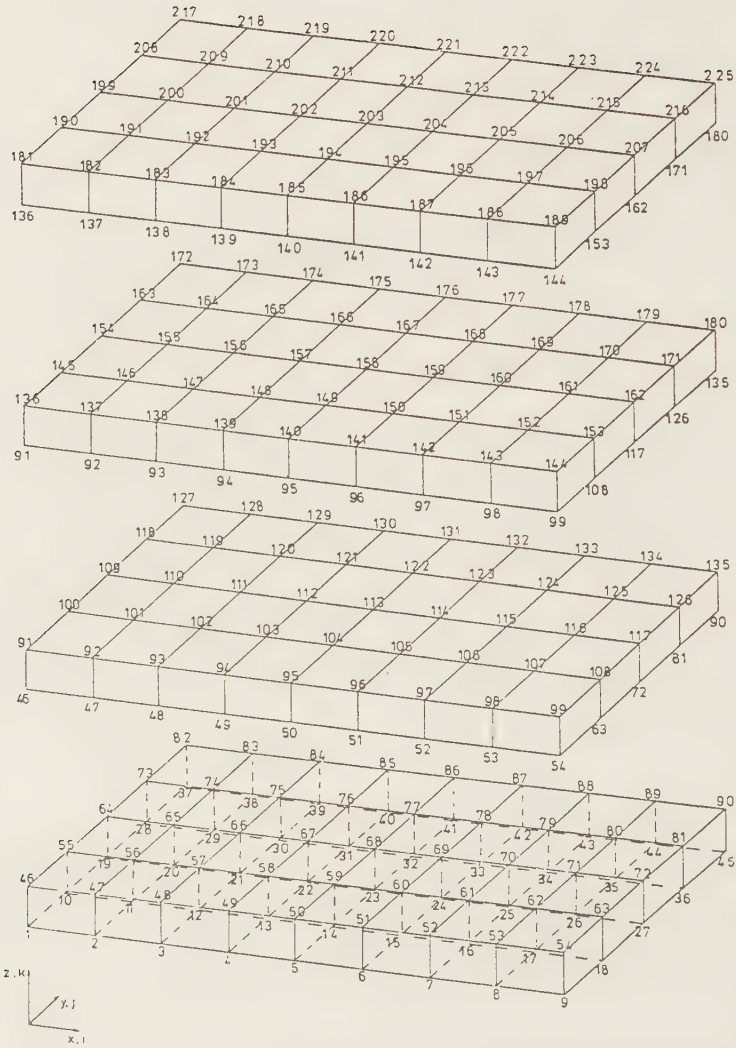


Bild A4.1: Maschennetz, bestehend aus 225 Knoten

$$NXP = NX + 1$$

die Zahl der Knoten in i-Richtung darstellt.

Durch die hier verwendete Indizierung des Maschennetzes bietet sich die Verwendung eindimensionaler Felder bei der Programmierung an, wodurch die explizite Vektorisierung wesentlich vereinfacht worden ist. Weiterhin ergeben sich sehr große Vektorlängen, die für eine effiziente Nutzung des Vektorrechners Cyber 205 unbedingte Voraussetzung sind.

Literaturverzeichnis

- [1] Fister, W.: Fluidenergiemaschinen, Band 1. Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1984.
- [2] Demirdzic, I.; Gosman, A. D.; Issa, R. I.: A Finite-Volume Method for the Prediction of Turbulent Flows in Arbitrary Geometries. Proc. 7th Int. Conf. on Num. Meth. in Fluid Dyn. (ed. W. C. Reynolds), Lecture Notes in Physics 141 (1980). Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1980.
- [3] Rhie, C. M.: A Pressure Based Navier-Stokes Solver Using the Multigrid Method. AIAA 24th Aerospace Sciences Meeting, January 6-9, 1986, Reno, Nevada.
- [4] Issa, R. I.: Numerical Methods for Two- and Three-Dimensional Recirculating Flows. Computational Methods for Turbulent, Transonic and Viscous Flows (ed. J. A. Essers). Hemisphere Publ. Corporation, Washington, New York, London 1983.
- [5] Patel, N. R.: A MAC-Scheme in Boundary-Fitted Curvilinear Coordinates. Numerical Heat Transfer, vol. 6, pp. 383 - 394, 1983
- [6] Hah, C.: A Navier-Stokes Analysis of Three-Dimensional Turbulent Flows inside Turbine Blade Rows. ASME J. Eng. Power, 106, pp. 421 - 429, 1984.
- [7] Moore, J. G.: An elliptic calculation procedure for three-dimensional viscous flow. AGARD Lecture Series 140, 1985.
- [8] Zahn, G.: Theoretische und experimentelle Strömungsuntersuchungen in Umlenkanälen von Turbomaschinen. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum 1982.
- [9] Tasche, J.: Berechnung der räumlichen, reibungsbehafteten Strömung durch beschaufelte und unbeschaufelte Rückführkanäle mehrstufiger radialer Turbomaschinen. VDI-Berichte 572, VDI-Verlag, Düsseldorf 1985.

- [10] Neumann, G.: Berechnete, prozeßbeeinflussende Strömungsvorgänge in Schraubenverdichtern. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum 1986.
- [11] Voith Getriebe KG: Hydrodynamische Getriebe, Kupplungen, Bremsen. Krausskopf Verlag, Mainz 1970.
- [12] Adrian, F. W.: Strömungsuntersuchungen und Analyse in Kreisläufen hydrodynamischer Wandler. Dissertation Ruhr-Universität Bochum 1985.
- [13] Rizzi, A. W.; Klavins, A.; MacCormack, R. W.: A generalized hyperbolic marching technique for three-dimensional supersonic flow with shocks. Proc. 4th Int. Conf. on Num. Meth. in Fluid Dyn. (ed. R. D. Richtmeyer), Lecture Notes in Physics 35 (1975). Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1975.
- [14] Peyret, R.; Taylor, T. D.: Computational Methods for Fluid Flow. Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin 1983.
- [15] Thomasset, F.: Implementation of Finite-Element Methods for Navier-Stokes Equations. Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin 1981.
- [16] Kickbusch, E.: Föttinger-Kupplungen und Föttinger-Getriebe. Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1963.
- [17] Patankar, S. V.; Spalding, D. B.: A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 15, pp. 1787 - 1806, 1972.
- [18] Harlow, F. H.; Welch, E.: Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface. The Physics of Fluids, vol. 8, no. 12, pp. 2182 - 2189, 1965.
- [19] Hirt, C. W.; Nichols, B. D.; Romero, N. L.: SOLA - A Numerical Solution Algorithm for Transient Fluid FLOws. Los Alamos Scientific Laboratory, LA-5852, 1975.

- [20] Amsden, A.; Hirt, C. W.: YAGUI - An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Computer Program for Fluid Flows at All Speeds. Los Alamos Scientific Laboratory, LA-5100, 1973.
- [21] VDI-Richtlinie 2153: Hydrodynamische Getriebe. VDI-Verlag, Düsseldorf, April 1974.
- [22] Fister, W.: Fluidenergiemaschinen, Band 2. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1986.
- [23] Fister, W.; Adrian, F.W.; Tasche, J.: Strömungsuntersuchungen an hydrodynamischen Wandlern in Leistungsverzweigungen. Arbeits- und Ergebnisbericht 1982/83. Sonderforschungsbereich 117. Leistungsverzweigung in der Antriebstechnik, Heft 6, 1983.
- [24] Truckenbrodt, E.: Fluidmechanik, Band 1. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1980.
- [25] Stein, L.R.; Gentry, R.A.; Hirt, C.W.: Computational Simulation of Transient Blast Loading on Three-Dimensional Structures. Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng. 11 (1977), pp. 57-74.
- [26] Schlichting, H.: Grenzschicht-Theorie. 8. Auflage, bearbeitet und erweitert unter Mitwirkung von F.W. Riegels. G. Braun Verlag, Karlsruhe 1982.
- [27] Bird, B. R.; Stewart, W. E.; Lightfoot, E. N.: Transport Phenomena. John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore 1960.
- [28] Moore, J.; Moore, J. G.: A Calculation Procedure for Three-Dimensional, Viscous, Compressible Duct Flow, Part II - Stagnation Pressure Losses in a Rectangular Elbow. Trans. ASME Journal of Fluids Engineering, vol. 101, pp.423 - 428, 1979.
- [29] Anderson, D. A.; Tannehill, J. C.; Pletcher, R. H.: Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. Hemisphere Publ. Corporation, Washington, New York, London 1984.
- [30] Patankar, S. V.: Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Hemisphere Publ. Corporation, Washington, New York, London 1980.

- [31] Rodi, W.; Schatzmann, M.; Scheuerer, G.; Rastoggi, A. K.;
Schönung, B.: Veröffentlichungen des Hochschulkurses
"Numerische Berechnung turbulenter Strömungen in For-
schung und Praxis". 19.-21. März 1984 in Karlsruhe.
- [32] Margolin, L. G.: Computer Modeling and Theory. A Method
for Treating Hourglass Patterns, from LA-9196-PR, Los
Alamos National Laboratory 1983.
- [33] Kordulla, W.: Three-Dimensional Viscous Flow Simulations
Based On Finite-Volume Formulations. DfVLR Aerodyna-
mische Versuchsanstalt Göttingen, IB 221-84 A 09, 1984.
- [34] Kordulla, W.; Vinokur, M.: Efficient Computation of Volume
in Flow Predictions. AIAA-Journal, vol. 21, pp. 917 - 918, 1983.
- [35] Amsden, A. A.; Ruppel, H. M.: SALE-3D: A Simplified
ALE Computer Program For Calculating Three-Dimen-
sional Fluid Flow. Los Alamos National Laboratory,
NUREG ICR-2185, LA-8905, 1981.
- [36] Hirt, C. W.; Amsden, A. A.; Cook, J. C.: An Arbitrary
Lagrangian-Eulerian Computing Method for All Flow Speeds.
Journal of Computational Physics 14, pp. 227 - 253, 1974.
- [37] Serrin, J.: Mathematical Principles of Classical Fluid Me-
chanics. in: Handbuch der Physik, Bd. VIII, 1, Herausgeber:
Flügge, S.; Truesdell, C.: Springer Verlag, Berlin, Göttingen,
Heidelberg 1959.
- [38] Amsden, A. A.; Ramshaw, J. D.; Cloutman, L. D.;
O'Rourke, P. J.: Improvements and Extensions to the KIVA
Computer Program. LA-10534-MS, Los Alamos National
Laboratory 1986.
- [39] Amsden, A. A.; Ruppel, H. M.; Hirt, C. W.: SALE: A Simpli-
fied ALE Computer Program for Fluid Flow at All Speeds.
LA-8095, Los Alamos National Laboratory 1980.
- [40] Gersten, K.: Einführung in die Strömungsmechanik. Studien-
bücher Naturwissenschaft und Technik, Bd. 20, Bertelsmann
Universitätsverlag, Düsseldorf 1974.

- [41] **Grahl, K.G.; Thiele, M.:** Strömungsuntersuchungen an hydrodynamischen Wandlern. Arbeits- und Ergebnisbericht 1984/1986. Sonderforschungsbereich 117/B8. Leistungsverzweigung in der Antriebstechnik, Ruhr-Universität Bochum 1986.
- [42] **Bronstein, I. N.; Semendjajew, K. A.:** Taschenbuch der Mathematik. Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt/Main 1984.
- [43] **Roache, P. J.:** Computational Fluid Dynamics. Hermosa Publishers, Albuquerque 1985.
- [44] **Hirt, C. W.:** Heuristic Stability Theory for Finite-Difference-Equations. Journal of Computational Physics, 2, pp. 339 - 355 (1968).
- [45] **Hirt, C. W.; Cook, J. L.:** Calculating Three-Dimensional Flows around Structures and over Rough Terrain. Journal of Computational Physics, 10, pp. 324 - 340 (1972).
- [46] **Thompson, J. F.:** Numerical Solutions of Flow Problems Using Body-Fitted Coordinate Systems. in: Computational Fluid Dynamics, ed. Kollmann, W.; Hemisphere Publ. Corporation, Washington 1980.
- [47] **Thompson, J. F.:** Grid Generation Techniques in Computational Fluid Dynamics. AIAA-Journal, vol. 22, no. 11, pp. 1505 - 1523, 1984.
- [48] **Willeke, A.:** Erzeugung von Maschennetzen mit nicht-orthogonalen Netzlinien. Unveröffentlichte Diplom-Arbeit am Lehrstuhl für Fluidenergiemaschinen 1984.
- [49] **Thompson, J. F.:** Elliptic Grid Generation. in: Numerical Grid Generation, ed. Thompson, J. F.; Elsevier Science Publishing Co., Inc., New York 1982.
- [50] **Smith, R. E.:** Algebraic Grid Generation. in: Numerical Grid Generation, ed. Thompson, J. F.; Elsevier Science Publishing Co., Inc., New York 1982.

- [51] Thompson, J. F.; Thames, F. C.; Mastin, C. W.: Boundary Fitted Curvilinear Coordinate Systems For Solution of Partial Differential Equations on Fields Containing Any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies. NASA-CR-2729, July 1977.
- [52] Hamel, G.: Spiralförmige Bewegung zäher Flüssigkeiten. Jahresbericht der Deutschen Mathem.-Vereinigung. XXV, 1. Abt. Heft 1/3, pp. 35 - 61 (1916).
- [53] Batchelor, G. K.: An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press, Cambridge 1967.
- [54] Millsaps, K.; Pohlhausen, K.: Thermal Distributions in Jeffery-Hamel Flows Between Nonparallel Plane-Walls. Journal of the Aeronautical Sciences, March 1953, vol. 20, pp. 187 - 196.
- [55] White, F. M.: Viscous Fluid Flow. McGraw-Hill Book Company, New York 1974.
- [56] El Telbany, M. M. M.; Reynolds, A. J.: Velocity Distributions in Plane Turbulent Channel Flows. J. Fluid Mech. (1980), vol. 100, part 1, pp. 1 - 29, Cambridge University Press, Cambridge 1980.
- [57] Humphrey, J. A. C.; Taylor, A. M. K.; Whitelaw, J. M.: Laminar Flow In A Square Duct Of Strong Curvature. J. Fluid Mech. (1977), vol. 83, part 3, pp. 509 - 527, Cambridge University Press, Cambridge 1977.
- [58] Prandtl, L.: Führer durch die Strömungslehre, 6. neubearbeitete Auflage. Herausgeber: Oswatitsch, K. und Wiegand, K.; Vieweg Verlag, Braunschweig 1965.
- [59] Gersten, K.: Single-Phase Fluid Flow. in: Heat Exchanger Design Handbook, ed. Schlünder, E. U.; Bell, K. J.: Hemisphere Publ. Corporation, Washington, London, New York 1983.
- [60] Vavra, M.: Aerothermodynamics and Flow in Turbomachines. John Wiley & Sons, Inc., New York, London 1960.

Lebenslauf

persönliche Daten

Name:	Klaus-Uwe Ziegs
Geburtsdatum:	24. September 1958
Geburtsort:	Herten/Westfalen
Staatsangehörigkeit:	deutsch
Familienstand:	ledig

Ausbildung

4/1965 - 7/1968	Comenius-Grundschule in Herten
8/1968 - 5/1977	Städtisches Gymnasium Herten
10/1977 - 11/1982	Ruhr-Universität Bochum Fakultät für Maschinenbau
3/1983 - 2/1986	Fachhochschule Bochum Fachbereich Wirtschaft

Qualifikationen

01.06.1977	Abitur
18.11.1982	Diplom-Ingenieur Maschinenbau Vertiefungsrichtung: Konstruk- tionstechnik
12.02.1986	Diplom-Wirtschaftsingenieur

Berufstätigkeit

11/1982 - heute

wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Ruhr-Universität Bochum, Institut für Energietechnik, Lehrstuhl für Fluidenergiemaschinen (ehemals Prof. Dr.-Ing. W. Fister, ab 3/1986 Prof. Dr.-Ing. K.G. Grahl)

Sonstiges

10/1980 - 8/1982

studentische Hilfskraft an der Ruhr-Universität Bochum, Institut für Konstruktionstechnik, Lehrstuhl für Maschinenelemente und Förder-technik (Prof. Dr.-Ing. E.O. Schneidersmann)

